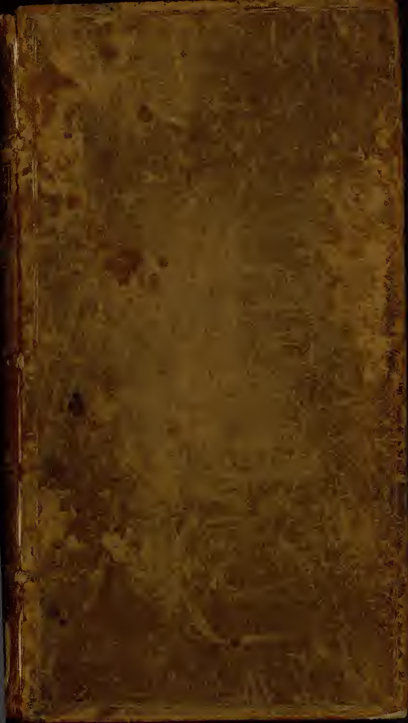
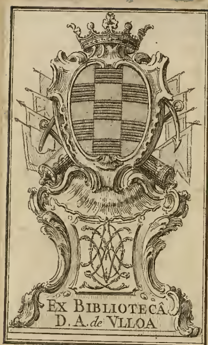



EX BIBLIOTECÂ
D. A. de VLLOA



Arithmetica Universalis:

SIVE

DE COMPOSITIONE

ET

Resolutione Arithmetica

LIBER.



BOOKS Printed for Benjamin *and* Samuel Tooke.

CLASSICKS.

Virgilii Opera.
Horatii Opera.
Juvenal. & Perfii Sat.
Terentii Comœdiæ.
Tullii Orationes.
Ovidii Metamorph.
—— Epiftolæ.
—— Faftorum.
Phædri Fabulæ.
Lucius Florus.
Salluftii Hiftoria.
Eutropii Hiftoria.
Martialis Epigrammata.
Lucretius de Rerum Natura, by *Creech*.
Suetonius.
Cæfaris Commentarii.
Cornelius Nepos.

} Delphini.

Corpus omnium Veterum Poetarum, 2 Vol. Fol.
Livii Hiftoria, 2 Vol. 8vo.
Pantheon, or the Hiftory of the Heathen Gods, 8vo.
Xenophon de Cyri Inftitutione, Gr. & Lat.
Quintus Curtius Minellii.
Tullius de Officiis, Minellii.
Plautus, 2 vol. 12mo.
Ray's Nomenclatura.
Latin Common-Prayer.
Latin Teftament.
Synopfis Græcæ Linguæ.
Inftitutiones Chriftianæ.
Tullii Orationes felectæ, 12mo.
Græca Epigram. Weft. &c.
Cæfaris Comment. 12mo.
Homeri Ilias, Gr. & Lat.
Littleton's Dictionary.
Cole's Dictionary, Lat. 8vo. and Englifh.

MISCELLANIES.

Mr. *Collier*'s Church-Hiftory, 2 vol. Fol. compleat.
Hiftory of *England*, 2 vol. Fol.
State-Tryals, 4 vol. Fol. compleat.
Bp *Burnett*'s Hiftory of the Reformation, 3 vol. Fol. compleat.
Cambridge Concordance, with a great many Additions.
All Dr. *Sherlock*'s Works.
Feltham's Refolves.
Dean *Stanhope*'s Works.
Drelincourt on Death.
Stanhope's Chriftian Pattern, 8vo.
Echard's Roman Hiftory, 5 vol. compleat.
Bona's Guide to Eternity.
Seneca's Morals.
Comber's Epitomy of the Common-Prayer.
Tillotfon's Works, 3 vol. Fol. compleat.
Nelfon's Feafts and Fafts.
Addifon's Works compleat.
Tatlers compleat.

Arithmetica Universalis:

SIVE

DE COMPOSITIONE

ET

RESOLUTIONE

ARITHMETICA

LIBER.

EDITIO SECUNDA,
In qua multa immutantur & emendantur, nonnulla adduntur.



LONDINI;

Impensis BENJ. & SAM. TOOKE, Bibliopolarum, juxta Medii Templi Portam, in Vico vulgo vocato *Fleetstreet.* M.DCC.XXII.

ARITHMETICA UNIVERSALIS,

SIVE

De COMPOSITIONE & RESOLUTIONE ARITHMETICA

LIBER.

COMPUTATIO vel fit per *numeros* ut in vulgari Arithmetica, vel per *ſpecies* ut Analyſtis mos eſt. Utraque iiſdem innititur fundamentis, & ad eandem metam collimat: *Arithmetica* quidem definite & particulariter, *Algebraica* autem indefinitè & univerſaliter; ita ut enuntiata ferè omnia quæ in hâc computatione habentur, & præſertim concluſiones, *Theoremata* dici poſſint. Verùm Algebra maximè præcellit quòd cùm in Arithmetica Quæſtiones tantùm reſolvantur progrediendo à datis ad quæſitas quantitates, hæc à quæſitis tanquam datis ad datas tanquam quæſitas quantitates plerumque regreditur; ut ad concluſionem aliquam, ſeu Æquationem, quocunque demum modo perveniatur, ex quâ quantitatem quæſitam elicere liceat. Eoque pacto conficiuntur difficillima Problemata quorum reſolutiones ex Arithmetica ſola fruſtra peterentur. Arithmetica tamen Algebræ in omnibus ejus operationibus ita ſubſervit, ut non niſi unicam perfectam *computandi Scientiam* conſtituere videantur; & utramque propterea conjunctim explicabo.

Quiſquis hanc Scientiam aggreditur, imprimis vocum & notarum ſignificationes intelligat, & fun-

damentales addiscat operationes, Additionem nempe Subductionem, Multiplicationem, Divisionem, Extractionem Radicum, Reductiones fractionum & radicalium quantitatum, & modos ordinandi terminos Æquationum, ac incognitas quantitates (ubi plures sunt) exterminandi. Deinde has operationes, reducendo Problemata ad æquationes, exerceat; & ultimò naturam & resolutionem æquationum contempletur.

De Vocum quarundam & notarum significatione.

PER *Numerum* non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem quæ pro unitate habetur rationem intelligimus. Estque triplex; integer, fractus & surdus: *Integer* quem unitas metitur, *Fractus* quem unitatis pars submultiplex metitur, & *Surdus* cui unitas est incommensurabilis.

Integrorum numerorum notas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,) & notarum, ubi plures inter se nectuntur, valores nemo non intelligit. Quemadmodum verò numeri in primo loco ante unitatem, sive ad sinistram, scripti denotant denas unitates, in secundo centenas, in tertio millenas, *&c.* sic numeri in primo loco post unitatem scripti denotant decimas partes unitatis, in secundo centesimas, in tertio millesimas, *&c.* Hos autem dicimus Fractos *Decimales* quòd in ratione decimali perpetuò decrescant. Et ad distinguendum integros à decimalibus interjici solet comma, vel punctum, vel etiam lineola. Sic numerus 732'|569, denotat septingentas triginta duas unitates, una cum quinque decimis, sex centesimis, & novem millesimis partibus unitatis. Qui & sic 732,|569, vel sic 732'569, vel etiam sic 732⌞569, nonnunquam scribitur. Atque ita numerus 57104'2083, denotat quinquaginta

ginta septem mille, centum & quatuor unitates; una cum duabus decimis, octo millesimis, & tribus decimis millesimis partibus unitatis. Et numerus 0'064 denotat sex centesimas & quatuor millesimas partes. Surdorum & aliorum fractorum notæ in sequentibus habentur.

Cum rei alicujus quantitas ignota est vel indeterminatè spectatur, ita ut per numeros non liceat exprimere, solemus per speciem *aliquam seu literam designare.* Et si quando cognitas quantitates tanquam indeterminatas spectemus, discriminis causa designamus initialibus Alphabetæ literis a, b, c, d, & incognitas finalibus z, y, x, &c. Aliqui pro cognitis substituunt consonantes vel majusculas literas, & vocales vel minusculas pro incognitis.

Quantitates vel Affirmativæ *sunt seu majores nihilo, vel* Negativæ *seu nihilo minores.* Sic in rebus humanis possessiones dici possunt bona affirmativa, debita vero bona negativa. Inque motu locali progressus dici potest motus affirmativus, & regressus motus negativus, quia prior auget & posterior diminuit iter confectum. Et ad eundem modum in Geometria, si linea versus plagam quamvis ducta pro affirmativa habeatur; negativa erit quæ versus plagam oppositam ducitur. Veluti si AB dextrorsum ducatur, & BC sinistrorsum; ac AB statuatur affirmativa

A C B
|——————————|

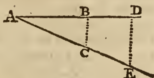
tunc BC pro negativa habebitur; eò quòd inter ducendum diminuit AB; redigitque vel ad breviorem AC, vel ad nullam si forte C inciderit in ipsum A, vel ad minorem nulla si BC longior fuerit quam AB de qua aufertur. *Negativæ* quantitati designandæ signum $-$, *Affirmativæ* signum $+$ præfigi solet. Signum $\mp$ incertum est, & signum $\pm$ etiam incertum sed priori contrarium.

A 2 In

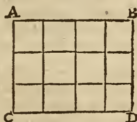
In aggregato quantitatum nota $+$ *significat quantitatem suffixam esse cæteris* addendam & *nota* $-$ *esse* subducendam. Et has notas vocabulis *plus* & *minus* exprimere solemus. Sic $2+3$, sive 2 plus 3, valet summam numerorum 2 & 3, hoc est 5. Et $5-3$, sive 5 minus 3, valet differentiam quæ oritur subducendo 3 à 5, hoc est 2. Et $-5+3$ valet differentiam quæ oritur subducendo 5 à 3, hoc est -2. Et $6-1+3$ valet 8. Item $a+b$ valet summam quantitatum a & b: Et $a-b$ valet differentiam, quæ oritur subducendo b ab a. Et $a-b+c$ valet summam istius differentiæ & quantitatis c. Puta si a sit 5, b 2, & c 8; tum $a+b$ valebit 7 & $a-b$ 3 & $a-b+c$ 11. Item $2a+3a$ valet $5a$. Et $3b-2a-b+3a$ valet $2b+a$; nam $3b-b$ valet $2b$ & $-2a+3a$ valet a, quorum aggregatum est $2b+a$. Et sic in aliis. Hæ autem notæ $+$ & $-$ dicuntur *Signa*. Et ubi neutrum initiali quantitati præfigitur signum $+$ subintelligi debet.

Multiplicatio propriè dicitur quæ fit per numeros integros, utpote quærendo novam quantitatem toties majorem quantitate multiplicanda quoties numerus multiplicans sit major unitate. Sed aptioris vocabuli defectu Multiplicatio etiam dici solet quæ fit per fractos aut surdos numeros; quærendo novam quantitatem in ea quacunque ratione ad quantitatem multiplicandam quam habet multiplicator ad unitatem. Neque tantùm fit per abstractos numeros sed etiam per concretas quantitates, ut per lineas, superficies, motum localem, pondera, &c. quatenus hæ ad aliquam sui generis notam quantitatem tanquam unitatem relatæ, rationes numerorum exprimere possunt, & vices supplere. Quemadmodum si quantitas A multiplicanda sit per lineam duodecim pedum, posito quod linea bipedalis sit unitas, producentur per istam multiplicationem

cationem 6 A, five fexies A, perinde ac fi A multiplicaretur per abftractum numerum 6, fiquidem 6 A fit in ea ratione ad A quam habet linea duodecim pedum ad unitatem bipedalem. Atque ita fi duas quafvis lineas A C & A D per fe multiplicare oportet, capiatur A B unitas, & agatur B C eique parallela D E, & A E productum erit hujus multiplicationis, eo quod fit ad A D ut A C ad unitatem A B.



Quinetiam mos obtinuit ut genefis feu defcriptio fuperficiei per lineam fuper alia linea ad rectos angulos moventem dicatur multiplicatio iftarum linearum. Nam quamvis linea utcunque multiplicata non poffit evadere fuperficies, adeoque hæc fuperficiei è lineis generatio longè alia fit à multiplicatione, in hoc tamen conveniunt, quod numerus unitatum in alterutra linea, multiplicatus per numerum unitatum in altera, producat abftractum numerum unitatum in fuperficie lineis iftis comprehenfa, fi modò Unitas fuperficialis definiatur, ut folet, Quadratum cujus latera funt unitates lineares. Quemadmodum fi recta A B conftet quatuor unitatibus & A C tribus, tum rectangulum A D conftabit quater tribus feu duodecim unitatibus quadratis ut infpicienti Schema patebit. Eftque fimilis analogia folidi & ejus quod continua trium quantitatum multiplicatione producitur. Et hinc viciffim evenit quod vocabula *ducere*, *contentum*, *rectangulum*, *quadratum*, *cubus*, *dimenfio*, *latus*, & fimilia quæ ad Geometriam fpectant, Arithmeticis tribuantur operationibus.



rationibus. Nam per *quadratum*, vel *rectangulum*, vel *quantitatem duarum dimensionum* non semper intelligimus superficiem, sed ut plurimùm quantitatem alterius cujuscunque generis quæ multiplicatione aliarum duarum quantitatum producitur, & sæpissimè lineam quæ producitur multiplicatione aliarum duarum linearum. Atque ita dicimus *Cubum* vel *Parallelepipedum*, vel *quantitatem trium dimensionum* pro eo quod binis multiplicationibus producitur, *latus* pro radice, *ducere* pro multiplicare; & sic in aliis.

Numerus speciei alicui immediatè præfixus denotat speciem illam toties sumendam esse. Sic $2\,a$ denotat duo a, $3\,b$ tria b, $15\,x$ quindecim x.

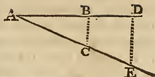
Duæ vel plures species immediatè connexæ designant factum, *seu quantitatem quæ fit per multiplicationem omnium in se invicem.* Sic ab denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b. Et abx denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b, & factum illud per x. Puta si a sit 2, & b sit 3, & x sit 5, tum ab erit 6 & abx 30.

Inter quantitates sese multiplicantes, nota $\times$, vel vocabulum *in*, ad factum designandum nonnunquam interscribitur. Sic 3×5 vel 3 in 5 denotat 15. Sed usus harum notarum præcipuus est, ubi compositæ quantitates sese multiplicant. Veluti si $y - 2\,b$ multiplicet $y + b$, terminos utriusque multiplicatoris lineolâ superimpositâ connectimus & scribimus $\overline{y - 2\,b}$ in $\overline{y + b}$, vel $\overline{y - 2\,b} \times \overline{y + b}$.

Divisio propriè est quæ fit per numeros integros quærendo novam quantitatem toties minorem quantitate dividenda quoties unitas sit minor Divisore. Sed ob analogiam vox etiam usurpari solet cum nova quantitas in ratione quacunque ad quantitatem dividendam quæritur quam habet unitas ad divisorem; sive divisor ille sit fractus aut surdus numerus aut alia cujusvis generis quantitas. Sic

ad

ad dividendum lineam AE per lineam AC, existente AB unitate; agenda est ED parallela CB, & erit AD Quotiens. Imò & Divisio propter similitudinem quandam dicitur cum rectangulum ad datam lineam tanquam Basem applicatur ut inde noscatur altitudo.



Quantitas infra quantitatem cum lineola interjecta denotat quotum, *seu quantitatem quæ oritur ex divisione superioris quantitatis per inferiorem.* Sic $\frac{6}{2}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo 6 per 2, hoc est 3: & $\frac{5}{8}$ quantitatem quæ oritur dividendo 5 per 8, hoc est octavam partem numeri 5: & $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo a per b; puta si a sit 15 & b 3, tum $\frac{a}{b}$ denotat 5. Et sic $\frac{ab-bb}{a+x}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo $ab-bb$ per $a+x$. Atque ita in aliis. Hujusmodi autem quantitates *fractiones* dicuntur, parsque superior *Numerator*, ac inferior *Denominator*.

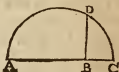
Aliquando Divisor quantitati divisæ, interjecto arcu, præfigitur. Sic ad designandum quantitatem quæ oritur ex divisione $\frac{axx}{a+b}$ per $a-b$, scribi potest $\overline{a-b)}\ \frac{axx}{a+b}$.

Etsi multiplicatio per immediatam quantitatum conjunctionem denotari solet, tamen numerus integer ante numerum fractum denotat summam utriusque. Sic $3\frac{1}{2}$ denotat tria cum semisse.

Si quantitas seipsam multiplicet, numerus factorum, compendii gratia, suffigi solet. Sic pro aaa scribimus a^3, pro $aaaa$ scribimus a^4, pro $aaaaa$ scribimus a^5, & pro $aaabb$ scribimus a^3bb vel a^3b^2. Puta si a sit 5 & b sit 2, tum a^3 erit $5 \times 5 \times 5$ sive 125, & a^4 erit $5 \times 5 \times 5 \times 5$ sive 625, atque a^3b^2 erit $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2$ sive 500. Ubi nota quod numerus inter duas species immediatè scriptus, ad priorem semper pertinet. Sic 3 in quantitate a^3bb non denotat bb ter capiendum esse sed a in se bis ducendum. Nota etiam quod hæ quantitates tot *dimensionum* vel *potestatum* vel *dignitatum* esse dicuntur quot factoribus seu quantitatibus se multiplicantibus constant, & numerus suffixus vocatur *Index* potestatum vel dimensionum. Sic aa est duarum dimensionum vel potestatum, & a^3 trium, ut indicat suffixus numerus 3. Dicitur etiam aa quadratum, a^3 cubus, a^4 quadrato-quadratum, a^5 quadrato-cubus, a^6 cubo-cubus, a^7 quadrato-quadrato-cubus, & sic porro. Et quantitas a ex cujus in se multiplicatione hæ potestates generantur dicitur earum *Radix*, nempe radix quadratica quadrati aa, cubica cubi a^3, &c.

Cùm autem radix per seipsam multiplicata producat quadratum, & quadratum illud iterum per radicem multiplicatum producat cubum, *&c.* erit (ex definitione Multiplicationis) ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum, & quadratum ad cubum, *&c.* Adeoque quantitatis cujuscunque *radix quadratica* erit medium proportionale inter unitatem & quantitatem illam, & *radix cubica* primum è duobus mediè proportionalibus, & *radix quadrato-quadratica* primum è tribus, & sic præterea. Duplici igitur affectione radices innotescunt, tum quod seipsas multiplicando producant superiores potestates, tum quod sint è mediis proportionalibus inter istas potestates & unitatem. Sic numeri

numeri 64 radicem quadraticam esse 8 & cubicam 4, vel ex eo patet quod 8×8 & $4 \times 4 \times 4$ valeant 64, vel quod sit 1 ad 8 ut 8 ad 64, & 1 ad 4 ut 4 ad 16 & 16 ad 64. Et hinc si lineæ alicujus AB radix quadratica extrahenda est, produc eam ad C ut sit BC unitas, dein super AC describe semicirculum, & ad B erige perpendiculum huic circulo occurrens in D, eritque BD radix, quia media proportionalis est inter AB & unitatem BC.



Ad designandam radicem *alicujus quantitatis præfigi solet nota* $\sqrt{}$ *si radix sit quadratica, &* $\sqrt{3:}$ *Si sit cubica, &* $\sqrt{4:}$ *Si quadrato-quadratica*, &c. Sic $\sqrt{64}$ denotat 8; & $\sqrt{3:64}$ denotat 4; & $\sqrt{aa}$ denotat a; & $\sqrt{ax}$ denotat radicem quadraticam ex ax; & $\sqrt{3:4axx}$ radicem cubicam ex $4axx$. Ut si a sit 3, & x 12; tum $\sqrt{ax}$ erit $\sqrt{36}$, seu 6; & $\sqrt{3:4axx}$ erit $\sqrt{3:1728}$, seu 12. Et hæ radices ubi non licet extrahere dicuntur *surdæ quantitates*, ut $\sqrt{ax}$; vel *surdi numeri*, ut $\sqrt{12}$.

Nonnulli pro designanda quadratica potestate usurpant q, pro cubica c, pro quadrato-quadratica qq, pro quadrato-cubica qc, &c. Et ad hunc modum pro quadrato, cubo, & quadrato-quadrato ipsius A, scribitur Aq, Ac, Aqq, &c. Et pro radice cubica ex $abb - x^3$ scribitur $\sqrt{c: abb - x^3}$. Alii alias notas adhibent, sed quæ jam ferè exoleverunt.

Nota $=$ *designat quantitates hinc inde* æquales *esse*. Sic $x = b$ designat x æqualem esse b.

Nota :: *significat quantitates hinc inde* proportionales *esse*. Sic $a.b :: c.d$, significat esse a ad b ut c ad d. Et $a.b.e :: c.d.f$ esse a, b & e inter se ut sunt c, d & f inter se respectivè, vel esse a ad c, b ad d & e ad f in eadem ratione.

Deni-

Denique notarum quæ ex his componuntur interpretatio per Analogiam facile innotescit. Sic enim $\frac{3}{4}a^3bb$ denotat tres quartas partes ipsius a^3bb, & $3\frac{a}{c}$ ter $\frac{a}{c}$, & $7\sqrt{ax}$ septies $\sqrt{ax}$. Item $\frac{a}{b}x$ denotat id quod fit multiplicando x per $\frac{a}{b}$, & $\frac{5ee}{4a+9e}Z^3$ id quod fit multiplicando Z^3 per $\frac{5ee}{4a+9e}$, hoc est per Quotum exortum divisione $5ee$ per $4a+9e$; & $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$ id quod fit multiplicando $\sqrt{ax}$ per $\frac{2a^3}{9c}$; & $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ quotum exortum divisione $7\sqrt{ax}$ per c; & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ quotum exortum divisione $8a\sqrt{cx}$ per summam quantitatum $2a+\sqrt{cx}$. Et sic $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ denotat quotum exortum divisione differentiæ $3axx-x^3$ per summam $a+x$, & $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ radicem ejus Quoti, & $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ id quod fit multiplicando radicem illam per summam $2a+3c$. Sic etiam $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ denotat radicem summæ quantitatum $\frac{1}{4}aa$ & bb & $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem summæ quantitatum $\frac{1}{2}a$ & $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, & $\frac{2a^3}{aa-zz}\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem illam multiplicatam per $\frac{2a^3}{aa-zz}$. Et sic in aliis.

Cæte-

Cæterum nota quod in hujufmodi complexis quantitatibus non opus eft ad fignificationem fingularum literarum femper attendere; fed fufficit in genere tantum intelligere, *e. g.* quod $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ fignificat radicem aggregati $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; quodcunq; tandem prodeat illud aggregatum cum numeri vel lineæ pro literis fubftituuntur. Atque ita quod $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}}{a-\sqrt{ab}}$ fignificat quotum exortum divifione quantitatis $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ per quantitatem $a-\sqrt{ab}$, perinde ac fi quantitates illæ fimplices effent & cognitæ, etfi quænam fint impræfentiarum prorfus ignoretur, & ad fingularum partium conftitutionem aut fignificationem neutiquam attendatur. Id quod monendum effe duxi ne complexione terminorum Tyrones quafi conterriti in limine hæreant.

DE ADDITIONE.

Numerorum, ubi *non funt admodum compofiti*, Additio per fe manifefta eft. Sic quod 7 & 9 feu $7+9$ faciunt 16, & quod $11+15$ faciunt 26 prima fronte patet. At in *magis compofitis* opus peragitur *fcribendo numeros ferie defcendente & fummas columnarum figillatim colligendo.* Quemadmodum fi numeri 1357 & 172 addendi funt, fcribe alterutrum 172 infra alterum 1357 ita ut hujus unitates 2 alterius unitatibus 7 fubjiciantur, cæterique numeri numeris correfpondentibus, nempe deni 7 denis 5, & centenus 1 centenis 3. Tum incipiendo ad dextram, dic 2 & 7 faciunt 9 quem fcribe infra. Item 7 & 5 faciunt 12, cujus pofteriorem

$$\begin{array}{r}1357\\ \underline{172}\\ 1529\end{array}$$

riorem numerum 2 fcribe infra, priorem vero 1 afferva proximis numeris 1 & 3 adjiciendum. Dic itaque præterea 1 & 1 faciunt 2, cui 3 adjectus facit 5, & fcribe 5 infra, & manebit tantùm 1 prima figura fuperioris numeri, quæ etiam infra fcribenda, eft, & fic habebitur fumma 1529.

Sic numeros 87899 + 13403 + 885 + 1920, quo in unam fummam redigantur, fcribe in ferie defcendente ita ut unitates unam columnam, deni numeri aliam, centeni tertiam, milleni quartam conftituant, & fic præterea. Deinde dic 5 + 3 valent 8, & 8 + 9 valent 17, fcribeque 7 infra, & 1 adjice proximis numeris dicendo 1 + 8 valent 9, 9 + 2 valent 11, ac 11 + 9 valent 20: Subfcriptoque 0, dic iterum ut ante 2 + 8 valent 10, 10 + 9 valent 19, 19 + 4 valent 23, & 23 + 8 valent 31, adeoque affervato 3 fubfcribe 1 ut ante & iterum dic 3 + 1 valent 4, 4 + 3 valent 7, & 7 + 7 valent 14. Quare fubfcribe 4, denuoque dic 1 + 1 valent 2, & 2 + 8 valent 10, quem ultimò fubfcribe, & omnium fummam habebis 104107.

87899
13403
1920
885
104107

Ad eundem modum numeri decimales adduntur ut in annexo paradigmate videre eft.

630'953
51'0807
305'27
987'3037

In terminis Algebraicis Additio *fit connectendo quantitates addendas cum fignis propriis, & infuper uniendo quæ poffunt uniri.* Sic a & b faciunt $a + b$; a & $-b$ faciunt $a - b$; $-a$ & $-b$ faciunt $-a - b$; $7a$ & $9a$ faciunt $7a + 9a$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $-a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$ vel $b\sqrt{ac} - a\sqrt{ac}$, nam perinde eft quo ordine fcribantur.

Quantitates affirmativæ quæ ex parte fpecierum conveniunt, uniuntur addendo numeros præfixos

quibus

quibus ſpecies multiplicantur. Sic $7a + 9a$ faciunt $16a$. Et $11bc + 15bc$ faciunt $26bc$. Item $3\frac{a}{c} + 5\frac{a}{c}$ faciunt $8\frac{a}{c}$, & $2\sqrt{ac} + 7\sqrt{ac}$ faciunt $9\sqrt{ac}$, & $6\sqrt{ab - xx} + 7\sqrt{ab - xx}$ faciunt $13\sqrt{ab - xx}$. Et ad eundem modum $6\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$ faciunt $13\sqrt{3}$. Quinetiam $a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{a + b}\sqrt{ac}$, additis nempe a & b tanquam ſi eſſent numeri multiplicantes $\sqrt{ac}$. Et ſic $\overline{2a + 3c}\sqrt{\frac{3axx - x^3}{a + x}} + 3a\sqrt{\frac{3axx - x^3}{a + x}}$ faciunt $\overline{5a + 3c}\sqrt{\frac{3axx - x^3}{a + x}}$ eo quod $2a + 3c$ & $3a$ faciant $5a + 3c$

Fractiones affirmativæ quarum idem eſt denominator, uniuntur addendo numeratores. Sic $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ faciunt $\frac{3}{5}$, & $\frac{2ax}{b} + \frac{3ax}{b}$ faciunt $\frac{5ax}{b}$ & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}} + \frac{17a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$ faciunt $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$, & $\frac{aa}{c} + \frac{bx}{c}$ faciunt $\frac{aa + bx}{c}$.

Negativæ quantitates eodem modo adduntur ac affirmativæ. Sic -2 & -3 faciunt -5; $-\frac{4ax}{b}$ & $-\frac{11ax}{b}$ faciunt $-\frac{15ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ & $-b\sqrt{ax}$ faciunt $-\overline{a - b}\sqrt{ax}$. Ubi verò *negativa quantitas affirmativæ adjicienda eſt,* oportet affirmativam negativa diminuere. Sic 3 & -2 faciunt 1; $\frac{11ax}{b}$ & $-\frac{4ax}{b}$ faciunt $\frac{7ax}{b}$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt

faciunt $\overline{b-a}\sqrt{ac}$. Et nota quod ubi negativa quantitas excedit affirmativam, aggregatum erit negativum. Sic 2 & -3 faciunt -1; $-\frac{11ax}{b}$ & $\frac{4ax}{b}$ faciunt $-\frac{7ax}{b}$, ac $2\sqrt{ac}$ & $-7\sqrt{ac}$ faciunt $-5\sqrt{ac}$.

In additione aut plurium aut magis compositarum quantitatum, convenit observare formam operationis supra in additione numerorum expositam. Quemadmodum si $17ax-14a+3$, & $4a+2-8ax$ & $7a-9ax$ addendæ sunt, dispono eas in serie descendente ita scilicet ut termini maxime affines stent in iisdem columnis. Nempe numeri 3 & 2 in una columna, species $-14a$ & $4a$ & $7a$ in alia columna, atque species $17ax$ & $-8ax$ & $-9ax$ in tertia. Dein terminos cujusque columnæ sigillatim addo dicendo 2 & 3 faciunt 5 quod subscribo, dein $7a$ & $4a$ faciunt $11a$ & insuper $-14a$ facit $-3a$ quod iterum subscribo, denique $-9ax$ & $-8ax$ faciunt $-17ax$ & insuper $17ax$ facit o. Adeoque prodit summa $-3a+5$.

$$\begin{array}{r} 17ax-14a+3 \\ -8ax+4a+2 \\ -9ax+7a \\ \hline * \quad -3a+5 \end{array}$$

Eadem methodo res in sequentibus exemplis absolvitur.

$$\begin{array}{r} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 19x+16a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11bc-7\sqrt{ac} \\ 15bc+2\sqrt{ac} \\ \hline 26bc-5\sqrt{ac} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\frac{4ax}{b}+6\sqrt{3}+\frac{1}{5} \\ +\frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{5} \end{array}$$

$-6xx$

$$\begin{array}{r} -6xx+\frac{3}{7}x \\ 5x^3+\frac{5}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{8}{7}x \end{array} \qquad \begin{array}{r} aay+2a^3-\frac{a^4}{2y} \\ -2ayy-4aay+a^3\phantom{-\frac{a^4}{2y}} \\ y^3+2ayy-\frac{1}{2}aay\phantom{+a^3-\frac{a^4}{2y}} \\ \hline y^3 \quad * -3\frac{1}{2}aay+3a^3-\frac{a^4}{2y} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^4+2ax^3\phantom{+8\frac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx}} \\ -3x^4-2ax^3+8\frac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} \\ -2x^4+5bx^3-20a^3\sqrt{aa-xx} \\ -4bx^3-7\frac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} \\ \hline * + bx^3+a^3\sqrt{aa+xx} \\ -20a^3\sqrt{aa-xx}. \end{array}$$

DE SUBDUCTIONE.

NUmerorum *non nimis compositorum* inventio etiam Differentiæ per ſe patet. Quemadmodum quod 9 de 17 relinquat 8. At in *magis compoſitis* Subductio fieri ſolet *ſubſcribendo numerum ablativum & ſigillatim auferendo figuras inferiores de ſuperioribus.* Sic ad auferendum 63543 de 782579, ſubſcripto 63543, dic 3 de 9 relinquit 6, quod ſcribe infra: Dein 4 de 7 relinquit 3 quod pariter ſcribe infra: Tum 5 de 5 relinquit 0 quod itidem ſubſcribe: Poſtea 3 de 2 auferendum eſt, ſed cum 3 ſit majus, figura 1 à proxima figura 8 mutuò ſumi debet, quæ una cum 2 faciat 12, à quo auferri poteſt 3, & reſtat 9, quod inſuper ſubſcribe: Adhæc cùm præter 6 etiam 1 de 8 auferendum ſit, adde 1 ad 6, & ſumma 7 de 8 relinquet 1 quod etiam ſubſcribe. Denique cùm in inferiori numero nihil reſtet auferendum de ſuperiori 7, ſubſcribe etiam 7, & ſic tandem habes differentiam 719036.

$$\begin{array}{r} 782579 \\ \underline{63543} \\ 719036 \end{array}$$

Cæterùm omnino cavendum eſt ut figuræ numeri ablativi

tivi subscribantur in locis homogeneis; nempe unitates infra alterius numeri unitates, deni numeri infra denos, decimæ partes infra decimas, *&c.* Sicut in Additione dictum est. Sic ad auferendum decimalem 0'63 ab integro 547, non dispones numeros hoc modo $\begin{smallmatrix}5'47\\0'63\end{smallmatrix}$; sed sic $\begin{smallmatrix}547\\ \quad 0'63\end{smallmatrix}$; ita nempe ut circulus qui locum unitatum in decimali occupat, subjiciatur unitatibus alterius numeri. Tum, circulis in locis vacuis superioris numeri subintellectis, dic 3 de 0 auferendum esse, sed cùm nequeat, debet 1 de loco anteriori mutuo sumi ut 0 evadat 10 à quo 3 auferri potest & dabit 7, quod infra scribe. Dein illud 1 quod mutuò sumitur, adjectum 6 facit 7, & hoc de superiore 0 auferendum est; sed cùm nequeat, debet iterum 1 de loco anteriori sumi ut 0 evadat 10, & 7 de 10 relinquet 3, quod similiter infra scribendum est. Tum illud 1 adjectum 0 facit 1, & hoc 1 de 7 relinquit 6, quod itidem subscribe. Denique figuras etiam 54, siquidem de illis nihil amplius auferendum restat, subscribe, & habebis residuum 546'37.

$$\begin{array}{r} 547 \\ 0'63 \\ \hline 546'37 \end{array}$$

Exercitationis gratia plura tum in integris tum in decimalibus numeris exempla subjecimus.

1673	1673	458074	35'72	46,5003	308,7
1541	1580	9205	14'32	3,078	25,74
132	93	448869	21'4	43,4223	282,96

Siquando major numerus de minori auferendus est, oportet minorem de majore auferre, & residuo præfigere negativum signum. Veluti si auferendum sit 1673 de 1541, è contra aufero 1541 de 1673, & residuo 132 præfigo signum —.

In terminis Algebraicis Subductio *fit connectendo quantitates cum signis omnibus quantitatis subducendæ mutatis, & insuper uniendo quæ possunt uniri*, perinde ut in Additione factum est. Sic $+ 7a$ de $+ 9a$ relin-

relinquit $+9a-7a$ ſive $2a$; $-7a$ de $+9a$ relinquit $+9a+7a$ ſive $16a$; $+7a$ de $-9a$ relinquit $-9a-7a$ ſive $-16a$; & $-7a$ de $-9a$ relinquit $-9a+7a$ ſive $-2a$. Sic $3\frac{a}{c}$ de $5\frac{a}{c}$ relinquit $2\frac{a}{c}$; $7\sqrt{ac}$ de $2\sqrt{ac}$ relinquit $-5\sqrt{ac}$; $\frac{2}{9}$ de $\frac{5}{9}$ relinquit $\frac{3}{9}$; $-\frac{4}{7}$ de $\frac{3}{7}$ relinquit $\frac{7}{7}$; $-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$ relinquit $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ de $\frac{-17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ relinquit $\frac{-25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bx}{c}$ relinquit $\frac{bx-aa}{c}$; $a-b$ de $2a+b$ relinquit $2a+b-a+b$ ſive $a+2b$; $3az-zz+ac$ de $3az$ relinquit $3az-3az+zz-ae$ ſive $zz-ac$; $\frac{2aa-ab}{c}$ de $\frac{aa+ab}{c}$ relinquit $\frac{aa+ab-2aa+ab}{c}$ ſive $\frac{-aa+2ab}{c}$: Et $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ de $\overline{a+x}\sqrt{ax}$ relinquit $\overline{a+x-a+x}\sqrt{ax}$ ſive $2x\sqrt{ax}$. Et ſic in aliis.

Cæterùm ubi quantitates pluribus terminis conſtant, operatio perinde ac in numeris inſtitui poteſt. Id quod in ſequentibus exemplis videre eſt:

$$\begin{array}{r} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 5x-2a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15bc+2\sqrt{ac} \\ -11bc+7\sqrt{ac} \\ \hline 26bc-5\sqrt{ac} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5x^3+\frac{5}{7}x \\ 6xx-\frac{3}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{8}{7}x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{3}{5} \\ \frac{4ax}{b}-6\sqrt{3}-\frac{1}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{5} \end{array}$$

De MULTIPLICATIONE.

NUmeri qui ex Multiplicatione duorum quorumvis numerorum non majorum quàm 9 oriuntur, memoriter addiscendi sunt. Veluti quod 5 in 7, facit 35, quòdque 8 in 9 facit 72, &c. Deinde majorum numerorum multiplicatio ad horum exemplorum normam instituetur.

Si 795 per 4 multiplicare oportet subscribe 4, ut vides. Dein dic, 4 in 5 facit 20, cujus posteriorem figuram 0 scribe infra 4, priorem vero 2 reserva in proximam operationem. Dic itaque præterea 4 in 9 facit 36, cui adde præfatum 2 & fit 38, cujus posteriorem figuram 8 ut ante subscribe, & priorem 3 reserva. Denique dic 4 in 7 facit 28 cui adde prædictum 3 & fit 31. Eoque pariter subscripto habebitur 3180 numerus qui prodit multiplicando totum 795 per 4.

```
 795
   4
----
3180
```

Porrò si 9043 multiplicandus est per 2305, scribe alterutrum 2305 infra alterum 9043 ut ante, & multiplica superiorem 9043 primò per 5 pro more ostenso, & emerget 45215, dein per 0 & emerget 0000, tertiò per 3 & emerget 27129, denique per 2 & emerget 18086. Hosque sic emergentes numeros in serie descendente ita scribe, ut cujusque inferioris ultima figura sit uno loco proprior sinistræ quàm ultima superioris. Tandem hos omnes adde & orietur 20844115, numerus qui fit multiplicando totum 9043 per totum 2305.

```
    9043
    2305
    ----
   45215
   0000
  27129
 18086
--------
20844115
```

Decimales numeri per integros vel per alios decimales perinde multiplicantur, ut vides in his exemplis.

72,4

72,4	50,18	3,9025
29	2,75	0,0132
6516	25090	78050
1448	35126	117075
	10036	39025
2099,6	137,9950	0,05151300

Sed nota quod *in prodeunte numero tot ſemper figuræ ad dextram pro decimalibus abſcindi debent quot ſunt figuræ decimales in utroque numero multiplicante.* Et ſi fortè non ſint tot figuræ in prodeunte numero, deficientes loci circulis adimplendi ſunt, ut hic fit in exemplo tertio.

Simplices termini Algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros & ſpecies in ſpecies ac ſtatuendo factum Affirmativum *ſi ambo factores ſint affirmativi aut ambo negativi, &* Negativum *ſi ſecus.*

Sic $2a$ in $3b$ vel $-2a$ in $-3b$ facit $6ab$; vel $6ba$: Nihil enim refert quo ordine ponantur. Sic etiam $2a$ in $-3b$ vel $-2a$ in $3b$ facit $-6ab$. Et ſic $2ac$ in $8bcc$ facit $16abccc$ ſive $16abc^3$; & $7axx$ in $-12aaxx$ facit $-84a^3x^4$; & $-16cy$ in $31ay^3$ facit $-496acy^4$; & $-4z$ in $-3\sqrt{az}$ facit $12z\sqrt{az}$. Atque ita 3 in -4 facit -12 & -3 in -4 facit 12.

Fractiones multiplicantur ducendo numeratores in numeratores ac denominatores in denominatores: Sic $\frac{2}{5}$ in $\frac{3}{7}$ facit $\frac{6}{35}$; & $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ facit $\frac{ac}{bd}$; & $2\frac{a}{b}$ in $3\frac{c}{d}$ facit $6 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ ſeu $6\frac{ac}{bd}$; & $\frac{3acy}{2bb}$ in $\frac{-7cyy}{4b^3}$ facit $\frac{-21accy^3}{8b^5}$; & $\frac{-4z}{c}$ in $\frac{-3\sqrt{az}}{c}$

facit $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$ & $\frac{a}{b}x$ in $\frac{c}{d}xx$ facit $\frac{ac}{bd}x^3$. Item 3 in $\frac{2}{5}$ facit $\frac{6}{5}$ ut pateat si 3 reducatur ad formam fractionis $\frac{3}{1}$ adhibendo unitatem pro Denominatore. Et sic $\frac{15aaz}{cc}$ in $2a$ facit $\frac{30a^3z}{cc}$. Unde obiter nota quod $\frac{ab}{c}$ & $\frac{a}{c}b$ idem valent; ut & $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$ & $\frac{a}{c}bx$ nec non $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ & $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$, & sic in aliis.

Quantitates radicales ejusdem denominationis (hoc est, si sint ambæ radices quadraticæ, aut ambæ cubicæ, aut ambæ quadrato-quadraticæ, *&c.*) multiplicantur ducendo terminos in se invicem sub eodem signo radicali. Sic $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ facit $\sqrt{15}$, & $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{cd}$ facit $\sqrt{abcd}$. Et $\sqrt[3]{5ayy}$ in $\sqrt[3]{7ayz}$ facit $\sqrt[3]{35aay^3z}$. Et $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ in $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ facit $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ hoc est * $\frac{aab}{c}$. Et $2a\sqrt{az}$ in $3b\sqrt{az}$ facit $6ab\sqrt{aazz}$ hoc est $6aabz$. Et $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ in $\frac{-2x}{\sqrt{ac}}$ facit $\frac{-6x^3}{\sqrt{aacc}}$ hoc est $\frac{-6x^3}{ac}$. Et $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$ in $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ facit $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$.

* Vide Cap. *De Notatione.*

Quantitates pluribus partibus constantes multiplicantur ducendo singulas unius partes in singulas alterius, perinde ut in Multiplicatione numerorum ostensum est. Sic $e-x$ in a facit $ac-ax$, & $aa+2ac-bc$ in $a-b$ facit $a^3+2aac-aab-3bac+bcc$. Nam $aa+2ac-bc$ in $-b$ facit $-aab-2acb+bbc$, & in a facit a^3+

$2aae-$

$2aac - abc$, quorum summa est $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$. Hujus multiplicationis specimen unà cum aliis consimilibus exemplis subjectum habes.

$$\begin{array}{r} aa + 2ac - bc \\ a - b \\ \hline -aab - 2abc + bbc \\ a^3 + 2aac - abc \quad \\ \hline a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + bb \\ aa + ab \quad \\ \hline aa + 2ab + bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline -ab - bb \\ aa + ab \quad \\ \hline aa \quad * - bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} yy + 2ay - \frac{1}{2}aa \\ yy - 2ay + aa \\ \hline aayy + 2a^3y - \frac{1}{2}a^4 \\ -2ay^3 - 4aayy + a^3y \quad \\ y^4 + 2ay^3 - \frac{1}{2}aayy \quad \quad \\ \hline y^4 \quad * - 3\frac{1}{2}aayy + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}} \\ 3a + \sqrt{\frac{abb}{c}} \\ \hline \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c} \\ \frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} \\ \hline \frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} + \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c} \end{array}$$

De DIVISIONE.

Divisio in numeris instituitur quærendo quot vicibus Divisor in Dividendo continetur, totiesque auferendo, & scribendo totidem unitates in Quoto. Idque iteratò si opus est, quamdiu divisor auferri potest.

Sic ad dividendum 63 per 7, quære quoties 7 continetur in 63 & emergent 9 pro quoto præcisè. Adeoque $\frac{63}{7}$ valet 9. Insuper ad dividendum 371 per 7, præfige divisorem 7, & imprimis opus instituens in initialibus figuris Dividendi proximè majoribus Divisore, nempe in 37, dic quoties 7 continetur in 37? Resp. 5. Tum scripto 5 in Quoto, aufer 5 × 7 seu 35 de 37, & restabit 2, cui adnecte ultimam figuram Dividendi nempe 1, & fit 21 reliqua pars Dividendi, in qua proximum opus instituendum est. Dic itaque ut ante quoties 7 continetur in 21? Resp. 3. Quare scripto 3 in Quoto, aufer 3 × 7 seu 21 de 21 & restabit 0. Unde constat 53 esse numerum præcisè qui oritur ex divisione 371 per 7.

```
7) 371 (53
   35
   --
    21
    21
    --
     0
```

Atque ita ad dividendum 4798 per 23, opus primò instituens in initialibus figuris 47 dic quoties 23 continetur in 47? Resp. 2. Scribe ergo 2 in Quoto, & de 47 subduc 2 × 23 seu 46, restatque 1, cui subjunge proximum numerum Dividendi, nempe 9, & fit 19 in subsequens opus. Dic itaque quoties 23 continetur in 19? Resp. 0. Quare scribe 0 in Quoto; & de 19 subduc 0 × 23 seu 0; & restat 19, cui subjunge ultimum numerum 8, & fit 198 in proximum opus. Quamobrem dic ultimò quoties 23 continetur in 198, (id quod ex initialibus numeris 2 & 19 conjici potest ani-

madvertendo quoties 2 continetur in 19)? Resp. 8. Quare scribe 8 in Quoto & de 198 subduc 8 × 23 seu 184, restabitque 14 adhuc dividendus per 23. Adeoque Quotus erit $208\frac{14}{23}$. Quod si hujusmodi fractio minùs placeat, possis Divisionem in Fractionibus decimalibus ultra ad libitum prosequi, semper adnectendo circulum numero residuo. Sic residuo 14 adnecte 0, fitque 140. Tum dic quoties 23 sit in 140? Resp. 6. Scribe ergo 6 in Quoto; & de 140 subduc 6 × 23 seu 138, & restabit 2, cui adnecte 0 ut ante. Et sic, opere ad arbitrium continuato, emerget tandem Quotus 208,6086, &c.

```
23) 4798 (208,6086, &c.
    46
    ——
     19
     00
     ——
     198
     184
     ——
      140
      138
      ——
       20
       00
       ——
       200
       184
       ——
        160
```

Ad eundem modum fractio decimalis 3,5218 per fractionem decimalem 46, 1 dividitur, & prodit 0, 07639, &c. *Ubi nota quod in Quoto tot figuræ pro decimalibus abscindendæ sunt quot sunt in ultimo dividuo plures quam in divisore:* Ut in hoc exemplo quinque, quia sex sunt in ultimo dividuo 0,004370 & una in Divisore 46,1.

```
46,1) 3,5218 (0,07639
      322,7
      —————
       2948
       2766
       ————
        1820
        1383
        ————
         4370
```

Exempla plura lucis gratia subjunximus.

```
9043) 20844115 (2305.          72,4) 2099,6 (29
      18086                          1448
      -----                          ----
       27581                         6516
       27129                         6516
       -----                         ----
        45215                           0
        45215
        -----
          0

50,18) 137,995 (2,75.      0,0132) 0,051513 (3,9025
       10036                        396
       -----                        ----
        37635                       1191
        35126                       1188
        -----                       ----
         25090                       330
         25090                       264
         -----                       ---
           0                          660
                                      660
                                      ---
                                       0
```

In terminis Algebraicis Divisio fit resolvendo quicquid per multiplicationem conflatur. Sic ab divis. per a dat b pro quoto, $6ab$ div. per $2a$ dat $3b$; & div. per $-2a$ dat $-3b$. $-6ab$ div. per $2a$ dat $-3b$; & div. per $-2a$ dat $3b$. $16abc^3$ div. per $2ac$ dat $8bcc$. $-84a^3x^4$ div. per $-12aaxx$ dat $7axx$. Item $\frac{6}{35}$ div. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{7}$. $\frac{ac}{bd}$ div. per $\frac{a}{b}$ dat $\frac{c}{d}$. $\frac{-21accy^3}{8b^5}$ div. per $\frac{3acy}{2bb}$ dat $\frac{-7cyy}{4b^3}$. $\frac{6}{5}$ div. per 3 dat

3 dat $\frac{2}{5}$; & viciſſim $\frac{6}{5}$ div. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{1}$ ſeu 3. $\frac{30a^3z}{cc}$ div. per $2a$ dat $\frac{15aaz}{cc}$; & viciſſim diviſ. per $\frac{15aaz}{cc}$ dat $2a$. Item $\sqrt{15}$ div. per $\sqrt{3}$ dat $\sqrt{5}$. $\sqrt{abcd}$ div. per $\sqrt{cd}$ dat $\sqrt{ab}$. $\sqrt{a^3c}$ per $\sqrt{ac}$ dat $\sqrt{aa}$ ſeu a. $\sqrt[3]{35aay^3z}$ div. per $\sqrt[3]{5ayy}$ dat $\sqrt[3]{7ayz}$. $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ div. per $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ dat $\sqrt{\frac{abb}{c}}$. $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$ div. per $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ dat $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$. Atque ita $\overline{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $a+b$ dat $\sqrt{ax}$, & viciſſim div. per $\sqrt{ax}$ dat $a+b$. Et $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $\frac{1}{a+b}$ dat $a\sqrt{ax}$; vel div. per a dat $\frac{1}{a+b}\sqrt{ax}$ ſive $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$; & viciſſim div. per $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$ dat a. Cæterùm in hujuſmodi reſolutionibus omninò cavendum eſt ut quantitates ſint ejuſdem ordinis quæ ad invicem applicantur. Nempe ut numeri applicentur ad numeros, ſpecies ad ſpecies, radicales ad radicales, numeratores Fractionum ad Numeratores ac Denominatores ad Denominatores, nec non in Numeratoribus, Denominatoribus, & Radicalibus quantitates cujuſque generis ad quantitates homogeneas.

Quod ſi quantitas dividenda nequeat ſic per diviſorem reſolvi, ſufficit ubi ambæ quantitates ſunt integræ ſubſcribere Diviſorem cum lineola interjecta. Sic ad dividendum ab per c ſcribitur $\frac{ab}{c}$; & ad dividendum $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ per a ſcribitur $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ vel

$a+b$

$\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$. Et sic $\sqrt{ax-xx}$ divis. per $\sqrt{cx}$ dat $\frac{\sqrt{ax-xx}}{\sqrt{cx}}$ sive $\sqrt{\frac{ax-xx}{cx}}$. Et $\overline{aa+ab}\sqrt{aa-2xx}$ divis. per $\overline{a-b}\sqrt{aa-xx}$ dat $\frac{aa+ab}{a-b}\sqrt{\frac{aa-2xx}{aa-xx}}$. Et $12\sqrt{5}$ div. per $4\sqrt{7}$ dat $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Ubi vero fracta sunt illæ quantitates, Duc Numeratorem Dividendæ quantitatis in Denominatorem Divisoris ac Denominatorem in Numeratorem, & *factus prior* erit Numerator, ac *posterior* Denominator Quoti. Sic ad dividendum $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ scribitur $\frac{ad}{bc}$, multiplicato scilicet a per d & b per c. Parique ratione $\frac{3}{7}$ divis. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{35}$ & $\frac{3a}{4c}\sqrt{ax}$ divis. per $\frac{2c}{5a}$ dat $\frac{15aa}{8cc}\sqrt{ax}$; divis. autem per $\frac{2c\sqrt{aa-xx}}{5a\sqrt{ax}}$ dat $\frac{15a^3x}{8cc\sqrt{aa-xx}}$. Et ad eundem modum $\frac{ad}{b}$ divis. per c (sive per $\frac{c}{1}$) dat $\frac{ad}{bc}$. Et c (sive $\frac{c}{1}$) divis. per $\frac{ad}{b}$ dat $\frac{bc}{ad}$. Et $\frac{3}{7}$ div. per 5 dat $\frac{3}{35}$. Et 3 div. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{5}$. Et $\frac{a+b}{c}\sqrt{cx}$ div. per a dat $\frac{a+b}{ac}\sqrt{cx}$. Et $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ div. per $\frac{a}{c}$ dat $\frac{ac+bc}{a}\sqrt{cx}$. Et $2\sqrt{\frac{axx}{c}}$ divis. per $3\sqrt{cd}$ dat

$\frac{2}{3}\sqrt{axx}$

$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{axx}{ccd}}$; Div. autem per $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{ccd}}$. Et $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{11}}$ divis. per $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ dat $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{49}{33}}$. Et sic in aliis.

Quantitas ex pluribus terminis composita dividitur applicando singulos ejus terminos ad Divisorem. Sic $aa + 3ax - xx$ divisum per a dat $a + 3x - \frac{xx}{a}$.

At ubi Divisor etiam ex pluribus terminis constat, divisio perinde ac in Numeris institui debet. Sic ad dividendum $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$ per $a - b$, Dic quoties a continetur in a^3, nempe primus terminus Divisoris in primo Dividendi? Resp. aa. Quare scribe aa in Quoto & ablato $a - b$ in aa sive $a^3 - aab$ de Dividendo, restabit $2aac - 3abc + bbc$ adhuc dividendum. Dic itaque rursus quoties a continetur in $2aac$? Resp. $2ac$. Quare scribe etiam $2ac$ in Quoto, & ablato $a - b$ in $2ac$ sive $2aac - 2abc$ de præfato Residuo, restabit etiamnum $- abc + bbc$. Quamobrem dic iterum quoties a continetur in $- abc$? Resp. $- bc$. Et proinde scribe $- bc$ in Quoto, & ablato denuo $a - b$ in $- bc$ sive $- abc + bbc$ de novissimo Residuo, restabit nihil. Quod indicat Divisionem peractam esse, prodeunte Quoto $aa + 2ac - bc$.

Cæterum ut hujusmodi operationes ad formam qua in Divisione numerorum usi sumus debitè reducantur, *termini tum dividendæ quantitatis tum Divisoris juxta dimensiones literæ alicujus quæ ad hanc rem maximè idonea judicabitur, in ordine disponendi sunt*, ita nempe ut illi primum locum occupent in quibus litera ista est plurimarum dimensionum, iique secundum in quibus dimensiones ejus ad maximas proximæ sunt; Et sic deinceps usque ad terminos qui per literam istam non omnino multiplicantur, adeoque ultimum locum occupabunt. Sic in allato Exemplo si termini ordinentur juxta dimensiones

ones literæ a, formam operis exhibebit adjunctum

$$
\begin{array}{l}
a-b)\; a^3 \begin{smallmatrix}+2aac\\-aab\end{smallmatrix} -3abc+bbc\,(aa+2ac-bc \\
\qquad\; a^3-aab \\
\qquad\; 0+2aac-3abc \\
\qquad\qquad 2aac-2abc \\
\qquad\qquad\qquad 0-abc+bbc \\
\qquad\qquad\qquad\;\; -abc+bbc \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Diagramma: Ubi videre est quod terminus a^3 sive a trium dimensionum occupat primum locum dividendæ quantitatis, terminique $\begin{smallmatrix}2aac\\-aab\end{smallmatrix}$ in quibus a est duarum dimensionum secundum occupat, & sic præterea. Potuit etiam dividenda quantitas sic scribi $a^3 \begin{smallmatrix}+2c\\-b\end{smallmatrix} aa-3bca+bbc$. Ubi termini secundum locum occupantes, uniuntur aggregando factores literæ juxta quam sit ordinatio. Et hoc modo si termini juxta dimensiones literæ b disponerentur, opus sicut in proximo Diagrammate institui deberet, Cujus explicationem adnectere visum est.

$$
\begin{array}{l}
-b+a)\; cbb \begin{smallmatrix}-3ac\\-aa\end{smallmatrix} b \begin{smallmatrix}+a^3\\+2aac\end{smallmatrix} \;(-cb \begin{smallmatrix}+2ac\\+aa\end{smallmatrix} \\
\qquad\quad cbb-acb \\
\qquad\qquad 0 \begin{smallmatrix}-2ac\\-aa\end{smallmatrix} b \begin{smallmatrix}+a^3\\+2aac\end{smallmatrix} \\
\qquad\qquad\;\; \begin{smallmatrix}-2ac\\-aa\end{smallmatrix} b \begin{smallmatrix}+2aac\\+a^3\end{smallmatrix} \\
\qquad\qquad\qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Dic

Dic quoties $-b$ continetur in cbb? Resp. $-cb$. Quare scripto $-cb$ in Quoto, aufer $-b+a$ in $-cb$ seu $bbc-abc$ & restabit in secundo loco $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$. Residuo huic adnecte, si placet, quantitates in ultimo loco, nempe $\begin{matrix}+a^3\\+2aac\end{matrix}$, & dic iterum quoties $-b$ continetur in $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$? Resp. $\begin{matrix}+2ac\\+aa\end{matrix}$. Quare his in Quoto scriptis, aufer $-b+a$ in $\begin{matrix}+2ac\\+aa\end{matrix}$ seu $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b\begin{matrix}+2aac\\+a^3\end{matrix}$ & restabit nihil. Unde constat divisionem peractam esse, prodeunte Quoto $-cb+2ac+aa$ ut ante.

Atque ita si dividere oportet $aay^4-aac^4-yyc^4+y^6-2y^4cc-a^6-2a^4cc-a^4yy$ per $yy-aa-cc$: Quantitates juxta literam y ad hunc modum ordino, $yy\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)\,y^6\begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{matrix}$.

Dein Divisionem ut in subjecto Diagrammate instituo. Adjiciuntur & alia exempla, de quibus insuper observandum est quod ubi dimensiones literæ ad quam ordinatio fit, non in eadem ubique progressione Arithmetica sed per saltum alicubi procedunt, locis vacuis substituitur nota *

$$yy\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)\,y^6\begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{matrix}\quad\Big(y^4\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}yy\begin{matrix}+a^4\\+aacc\end{matrix}$$

$$\underline{y^6\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}y^4}$$

$$0\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}y^4$$

$+2aa$

$$\begin{array}{l} +2aa \\ -cc \end{array} y^4 \begin{array}{l} -2a^4 \\ -aacc\,yy \\ +c^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 \end{array} \begin{array}{l} +a^4 \\ +aacc \end{array} yy$$

$$\begin{array}{l} +a^4 \\ +aacc \end{array} yy \begin{array}{l} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{array}$$

$$0 \quad 0$$

$$a+b)\; aa * -bb\; (a-b$$

$$\begin{array}{l} aa + ab \\ \hline 0 - ab \\ \quad - ab - bb \\ \hline \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$yy-2ay+aa) \qquad (yy+2ay-\tfrac{1}{2}aa$$

$$\begin{array}{l} y^4 \; * -3\tfrac{1}{2}aayy + 3a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 \\ \hline y^4 - 2ay^3 + aayy \\ \hline 0 + 2ay^3 - 4\tfrac{1}{2}aayy \\ \;\; + 2ay^3 - 4aayy + 2a^3y \\ \hline \quad 0 - \tfrac{1}{2}aayy + a^3y \\ \quad\; - \tfrac{1}{2}aayy + a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 \\ \hline \quad\quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$aa+ab\sqrt{2}+bb) \qquad (aa-ab\sqrt{2}+bb$$

$$\begin{array}{l} a^4 \quad * \quad * \quad * \quad +b^4 \\ \hline a^4 + a^3b\sqrt{2} + aabb \\ \hline \;\; - a^3b\sqrt{2} - aabb \\ \;\; - a^3b\sqrt{2} - 2aabb - ab^3\sqrt{2} \\ \hline \qquad + aabb + ab^3\sqrt{2} \\ \qquad + aabb + ab^3\sqrt{2} + b^4 \\ \hline \qquad\quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Aliqui Divifionem incipiunt ab ultimis terminis, fed eodem recidit fi inverfo terminorum ordine incipiatur à prioribus. Sunt & aliæ methodi dividendi fed facillimam & commodiffimam noffe fufficit.

De

De EXTRACTIONE RADICUM.

CUM numeri alicujus *radix quadratica* extrahi debet, *is in locis alternis, incipiendo ab unitate, punctis notandus est; Dein figura in Quoto seu Radice scribenda cujus quadratum figuræ vel figuris ante primum punctum aut æquale sit aut proximè minus. Et ablato illo quadrato, cæteræ radicis figuræ sigillatim invenientur dividendo residuum per duplum radicis eatenus extractæ, & singulis vicibus auferendo è residuo illo factum à figura novissimè prodeunte & decuplo prædicti Divisoris figura illa aucti.*

Sic ad extrahendam radicem ex 99856, imprimis nota cum punctis ad hunc modum 9˙98˙56. Dein quære numerum cujus quadratum æquatur primæ figuræ 9, nempe 3; scribeque in Quoto. Et de 9 ablato quadrato 3×3 seu 9, restabit 0; cui adnecte figuras ante proximum punctum, nempe 98 pro sequente opere. Tum neglecta ultima figura 8, dic quoties duplum 3 seu 6 continetur in priori 9? Resp. 1. Quare scripto 1 in Quoto, aufer factum 1×61 seu 61 de 98 restabit 37, cui adnecte ultimas figuras 56, & fiet 3756 numerus in quo opus denuo institui debet. Quare & hujus ultima figura 6 neglecta, dic quoties duplum 31 seu 62 continetur in 375 (id quod ex initialibus figuris 6 & 37 conjici potest animadvertendo quoties 6 continetur in 37?) Resp. 6. Et scripto 6 in Quoto aufer factum 6×626 seu 3756, & restabit nihil. Unde constat opus peractum esse; prodeunte Radice 316.

```
9˙98˙56 (316
9
—
098
 61
——
 3756
 3756
————
    0
```

Atque

Atque ita si radicem ex 22178791 extrahere oportet, imprimis facta punctatione quære numerum cujus quadratum, (siquidem id nequeat æquari) sit proxime minus figuris 22 antecedentibus primum punctum, & invenies esse 4. Nam 5×5 sive 25 majore est quam 22, & 4×4 sive 16 minor. Quare 4 erit prima figura radicis. Et hac itaque in Quoto scripta, de 22 aufer quadratum 4×4 seu 16, residuoque 6 adjunge desuper proximas figuras 17, & habebitur 617, cujus divisione per duplum 4 elicienda est secunda figura radicis. Nempe, neglecta ultima figura 7, dic quoties 8 continetur in 61? Resp. 7. Quare scribe 7 in Quoto, & de 617 aufer factum 7 in 87 seu 609 & restabit 8, cui adjunge proximas duas figuras 87, & habebitur 887, cujus divisione per duplum 47 seu 94 elicienda est tertia figura. Utpote dic quoties 94 continetur in 88? Resp. 0. Quare scribi 0 in quoto, adjungeque ultimas duas figuras 91, & habebitur 88791 cujus divisione per duplum 470 seu 940 elicienda est ultima figura. Nempe dic quoties 940 continetur in 8879?

```
22'17'87'91 (4709,43637 &c.
16
——
617
609
——
  88791
  84681
  ——————
    4110.00
    376736
    ——————
    3426400
    2825649
    ———————
     60075100
     56513196
     ————————
      356190400
      282566169
      —————————
      73624231
```

8879? Resp. 9. Quare scribe 9 in Quoto, & radicem habebis 4709.

Cæterum cum factus 9 × 9409 seu 84681 ablatus de 88791 relinquat 4110, id indicio est numerum 4709 non esse radicem numeri 22178791 præcise, sed ea paulo minorem existere. Et in hoc casu aliisque similibus si veram radicem magis appropinquare placeat, prosequenda est operatio in decimalibus numeris, adnectendo ad residuum circulos duos in singulis operationibus. Sic residuum 4110 adnexis circulis, evadit 411000; cujus divisione per duplum 4709 seu 9418 elicietur figura prima decimalis, nimirum 4. Dein scripto 4 in Quoto, aufer 4 × 94184 seu 376736 de 411000 & restabit 34264. Atque ita adnexis iterum duobus circulis, opus pro lubitu continuari potest, prodeunte tandem radice 4709,43637, &c.

Ubi vero radix ad medietatem aut ultra extracta est, cæteræ figuræ per divisionem solam obtineri possunt. Ut in hoc exemplo, si radicem ad usque novem figuras extrahere animus esset, postquam quinque priores 4709,4 extractæ sunt, quatuor posteriores 3637 elici possent dividendo residuum 34264 per duplum 4709,4.

Et ad hunc modum si radix ex 32976 ad usque quinque figuras extrahi debet; postquam figuræ punctis notantur, scribe 1 in Quoto, utpote cujus quadratum 1 × 1 seu 1 maximum est quod in 3, figura primum punctum antecedente, continetur. Ac de 3 ablato quadrato illo 1, restabit 2. Dein huic 2 annexis proximis figuris 29. Quære quoties duplum 1 seu 2 continetur in 22, & invenies quidem plusquam 10,

```
      3̇29̇76(181,59
      1
      ——
      229
      224
      ————
       576
       361
      ————
362) 215 (59
```

 sed

ſed nunquam licet diviſorem vel decies ſumere, imo neque novies in hoc caſu quia factus 9 × 29 ſive 261 major eſt quam 229 unde deberet auferri. Quare pone tantum 8. Et perinde ſcripto 8 in Quoto, & ablato 8 × 28 ſive 224 reſtabit 5. Huic inſuper annexis figuris 76, quære quoties duplum 18 ſeu 36 continetur in 57, & invenies 1, adeoque ſcribe 1 in Quoto ac de 576 ablato 1 × 361 ſeu 361 reſtabit 215. Denique ad cæteras figuras eliciendas divide hunc 215 per duplum 181 ſeu 362 & exibunt figuræ 59, quibus etiam ſcriptis in Quoto, habebitur Radix 181,59.

Eadem methodo radices etiam è decimalibus numeris extrahuntur. Sic ex 329,76 radix eſt 18,159. Et ex 3,2976 radix eſt 1,8159. Et ex 0,032976 radix eſt 0,18159. Et ſic præterea. Sed ex 3297,6 radix eſt 57,4247. Et ex 32,976 radix eſt 5,74247. Atque ita ex 9,9856 radix eſt 3,16. Sed ex 0,99856 radix eſt 0,999279, &c. Quemadmodum è ſubjectis Diagrammis conſtare poteſt.

32˙97;6(57,4247, &c.	0;99˙85˙6(0,999279, &c.
25	81
797	1885
749	1701
4860	18460
4576	17901
1148)284(247	1998) 559 (279

Extractionem radicis cubicæ & aliarum omnium, regula generali comprehendam, praxi potiùs intellectu facili quàm expeditæ conſulens, ne moram in eo, quod rarò uſu veniet, diſcentibus inferam. *Nimirum*, tertia *quaque figura incipiendo ab unitate, primò punctis*

punctis notanda est si radix sit cubica, *aut unaquæque* quinta *si sit* quadrato-cubica, *&c. Dein figura in Quoto scribenda est cujus maxima potestas (hoc est* cubica *si radix sit* cubica, *aut* quadrato-cubica *si radix sit* quadrato-cubica, *&c.) aut æquetur figuræ vel figuris ante primùm punctum, aut proximè minor sit. Et ablata illa potestate, figura proxima elicietur dividendo residuum proxima numeri resolvendi figura auctum, per potestatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ potestatis, hoc est, per* triplum Quadratum *Quoti si radix sit* cubica, *aut per* quintuplum quadrato-quadratum *si radix sit* quadrato-cubica, *&c. Rursusque à numero resolvendo ablata maxima Quoti potestate, figura tertia invenietur dividendo residuum illud proxima numeri resolvendi figura auctum per potestatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ potestatis.* Et sic in infinitum.

Sic ad extrahendam radicem cubicam ex 13312053, numerus ille primò punctis ad hunc modum 13'312.053 notandus est. Deinde in Quoto scribenda est illa figura 2 cujus cubus 8, siquidem æquari nequeat, proximè minor sit figuris 13 antecedentibus primum punctum. Et ablato illo cubo restabit 5, quod proxima numeri resolvendi figura 3 auctum, & per triplum quadratum quoti 2 divisum, quærendo nempe quoties 3 × 4 seu 12 continetur in 53, dat 4 pro secunda figura Quoti. Sed cùm Quoti 24 prodiret cubus 13824 major quàm qui auferri posset de figuris 13312 antecedentibus secundum punctum, scribi debet tantum 3 in Quoto. Tum

```
        13'312'053 (237
        —
aufer cub. 8
     12) restat 53 (4. aut 3.
     ———————
  aufer c. 12167
  1587) restat 1450 (7.
     ———————
  aufer c. 13312053
           restat 0
```

Quotus 23 in charta aliqua seorsim per 23 multiplicatus dat quadratum 529, quod iterum per 23 multiplicatum dat cubum 12167, & hic de 13312 ablatus relinquit 1145; quod proxima resolvendi numeri figura o auctum, & per triplum quadratum Quoti 23 divisum, quærendo nempe quoties 3 × 529 seu 1587 continetur in 11450, dat 7 pro tertia figura Quoti. Tum Quotus 237 per 237 multiplicatus dat quadratum 56169 quod iterum per 237 multiplicatum dat cubum 13312053, & hic de resolvendo numero ablatus relinquit nihil. Unde patet radicem quæsitam esse 237.

Atque ita ad extrahendam radicem quadrato-cubicam ex 364'30820, punctum ponitur ad quintam figuram, & figura 3, cujus quadrato-cubus 243 proximè minor est figuris 364 antecedentibus punctum istud, scribitur in Quoto. Dein quadrato-cubo 243 de 364 ablato, restat 121

```
         364'30820 (32,5
         ---------
         243
    405) 1213 (2
         ----
         33554432
5242880) 2876388,0 (5
```

quod proxima resolvendi numeri figura 3 auctum & per quinquies quadrato-quadratum Quoti divisum, quærendo nempe quoties 5 × 81 seu 405 continetur in 1213; dat 2 pro secunda figura. Quotus ille 32 in se ter ductus efficit quadrato-quadratum 1048576, & hoc iterum in 32 ductum efficit quadrato-cubum 33554432; qui à numero resolvendo ablatus relinquit 2876388. Itaque 32 est integra pars radicis, sed non justa radix, & proinde si opus in decimalibus numeris prosequi animus est, residuum circulo auctum dividi debet per quinquies prædictum quadrato-quadratum Quoti, quærendo quoties 5 × 1048576 seu 5242880 continetur in 2876388,0, & prodibit tertia figura

sive

five prima decimalis 5. Atque ita auferendo quadrato-cubum Quoti 32,5 de numero resolvendo ac dividendo residuum per quinquies quadrato-quadratum ejus, erui potest quarta figura. Et sic in infinitum.

Cum radix quadrato-quadratica extrahenda est, oportet bis extrahere radicem quadraticam, eo quod $\sqrt{4}$ *valeat* $\sqrt{2\times 2}$. *Et cum radix cubo-cubica extrahenda est, oportet extrahere radicem cubicam & ejus radicis radicem quadraticam, eo quod* $\sqrt{6}$ *valeat* $\sqrt{2\times 3}$: *Unde aliqui radices hasce non cubo-cubicas sed quadrato-cubicas dixere.* Et idem in aliis radicibus quarum indices non sunt numeri primi observandum est.

E simplicibus quantitatibus Algebraicis extractio radicum ex ipsa Notatione patet. Quemadmodum quod $\sqrt{aa}$ sit a, & quod $\sqrt{aacc}$ sit ac, & quod $\sqrt{9aacc}$ sit $3ac$, & quod $\sqrt{49a^4xx}$ sit $7aax$. Atque ita quod $\sqrt{\frac{a^4}{cc}}$ seu $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{cc}}$ sit $\frac{aa}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ sit $\frac{aab}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ sit $\frac{3az}{5b}$, & quod $\sqrt{\frac{4}{9}}$ sit $\frac{2}{3}$. Et quod $\sqrt{3}\frac{8b^6}{27a^3}$ sit $\frac{2bb}{3a}$. Et quod $\sqrt{4}aabb$ sit $\sqrt{ab}$. Quinetiam quod $b\sqrt{aacc}$ seu b in $\sqrt{aacc}$ valeat b in ac sive abc. Et quod $3c\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ valeat $3c\times\frac{3az}{5b}$ sive $\frac{9acz}{5b}$. Et quod $\frac{a+3x}{c}\sqrt{\frac{4bbx^4}{81aa}}$ valeat $\frac{a+3x}{c}\times\frac{2bxx}{9a}$ sive $\frac{2abxx+6bx^3}{9ac}$.

Hæc inquam patent siquidem propositas quantitates è radicibus in se ductis produci (ut aa ex a in a, $aacc$ ex ac in ac, $9aacc$ ex $3ac$ in $3ac$, &c.) prima fronte constare potest. Ubi vero quantita-

tes pluribus terminis constant, opus perinde ac in numeris absolvitur. Sic ad extrahendam radicem quadraticam ex $aa+2ab+bb$, imprimis radicem primi termini aa nempe a scribe in Quoto. Et ablato ejus quadrato $a \times a$ restabit $2ab+bb$ pro elicienda reliqua parte radicis. Dic itaque quoties duplum quoti seu $2a$ continetur in primo residui termino $2ab$? Resp. b. Adeoque scribe b in Quoto, & ablato facto b in $\overline{2a+b}$ seu $2ab+bb$ restabit nihil. Quod indicat opus peractum esse, prodeunte radice $a+b$.

$$aa+2ab+bb\ (a+b$$
$$aa$$
$$0$$
$$2ab+bb$$
$$0 \quad 0$$

Et sic ad extrahendam radicem ex $a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$, imprimis pone in Quoto radicem primi termini a^4 nempe aa, & ablato ejus quadrato $aa \times aa$ seu a^4 restabit $6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$ pro reliqua radice elicienda. Dic itaque quoties $2aa$ continetur in $6a^3b$? Resp. $3ab$ Quare scribe $3ab$ in Quoto & ablato facto $3ab$ in $\overline{2aa+3ab}$ seu $6a^3b+9aabb$ restabit etiamnum $-4aabb-12ab^3+4b^4$ pro opere prosequendo.

$$a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4\ (aa+3ab-2bb$$
$$a^4$$
$$0$$
$$6a^3b+9aabb$$
$$0 \quad -4aabb$$
$$-4aabb-12ab^3+4b^4$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

ſequendo. Adeoque dic iterum quoties duplum Quoti, nempe $2aa + 6ab$ continetur in $-4aabb - 12ab^3$, ſive quod perinde eſt dic quoties duplum primi termini Quoti ſeu $2aa$ continetur in primo reſidui termino $-4aabb$? Reſp. $-2bb$. Et proinde ſcripto $-2bb$ in Quoto, & ablato facto $-2bb$ in $2aa + 6ab - 2bb$ ſeu $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$, reſtabit nihil. Unde conſtat radicem eſſe $aa + 3ab - 2bb$.

Atque ita quantitatis $xx - ax + \frac{1}{4}aa$ radix eſt $x - \frac{1}{2}a$, & quantitatis $y^4 + 4y^3 - 8y + 4$ radix $yy + 2y - 2$, & quantitatis $16a^4 - 24aaxx + 9x^4 + 12bbxx - 16aabb + 4b^4$ radix $3xx - 4aa + 2bb$ ut è ſubjectis diagrammis conſtare poteſt.

$$
\begin{array}{l}
xx - ax + \tfrac{1}{4}aa\ (x - \tfrac{1}{2}a, \\
\underline{xx} \\
\quad 0 \\
\qquad \underline{-ax + \tfrac{1}{4}aa} \\
\qquad\quad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
9x^4 \begin{array}{c} -24aa \\ +12bb \end{array} xx \begin{array}{c} +16a^4 \\ -16aabb \\ +4b^4 \end{array} \left(3xx \begin{array}{c} -4aa \\ +2bb \end{array}\right. \\
\underline{9x^4} \\
\quad 0 \\
\qquad \underline{\begin{array}{c} -24aa \\ +12bb \end{array} xx \begin{array}{c} +16a^4 \\ -16aabb \\ +4b^4 \end{array}} \\
\qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$y^4 + 4y^3 * - 8y + 4\ (yy + 2y - 2$$
$$y^4$$
$$0$$
$$4y^3 + 4yy$$
$$0 - 4yy$$
$$-4yy - 8y + 4$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

Si radicem cubicam ex $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ oportet extrahere, operatio est hujusmodi. Extrahe

$$a^3 + 3aab + 3abb + b^3\ (a + b.$$
$$a^3$$
$$3aa)\ 0 + 3aab\ (b$$
$$a^3 + 3aab + 3abb + b^3$$
$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

radicem cubicam primi termini a^3 nempe a, & pone in Quoto. Tum ablato ejus cubo a^3; dic quoties triplum quadratum ejus seu $3aa$ continetur in proximo residui termino $3aab$? & prodit b. Quare scribe etiam b in Quoto, & cubo Quoti $a + b$ ablato restabit nihil. Radix itaque est $a + b$.

Eodem modo radix cubica, si extrahatur ex $z^6 + 6z^5 - 40z^3 + 96z - 64$, prodit $zz + 2z - 4$. Atque ita in altioribus radicibus.

De

De REDUCTIONE FRACTIONUM *&* RADICALIUM.

PRæcedentibus operationibus inſervit reductio fractarum & radicalium quantitatum, idque vel ad minimos terminos vel ad eandem denominationem.

De REDUCTIONE FRACTIONUM *ad minimos terminos.*

F*Ractiones ad minimos terminos reducuntur dividendo numeratores ac denominatores per maximum communem diviſorem.* Sic fractio $\frac{aac}{bc}$ reducitur ad ſimpliciorem $\frac{aa}{b}$ dividendo utrumque aac & bc per c; & $\frac{203}{667}$ reducitur ad ſimpliciorem $\frac{7}{23}$ dividendo utrumque 203 & 667 per 29; & $\frac{203aac}{667bc}$ reducitur ad $\frac{7aa}{23b}$ dividendo per $29c$. Atque ita $\frac{6a^3-9acc}{6aa+3ac}$ evadit $\frac{2aa-3cc}{2a+c}$ dividendo per $3a$. Et $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{aa-ab}$ evadit $\frac{aa+bb}{a}$ dividendo per $a-b$.

Et hac Methodo termini poſt Multiplicationem vel Diviſionem plerumque abbreviari poſſunt. Quemadmodum ſi multiplicare oportet $\frac{2ab^3}{3ccd}$ per

$9acc$

$\frac{9acc}{bdd}$ vel id dividere per $\frac{bdd}{9acc}$ prodibit $\frac{18aab^3cc}{3bccd^3}$, & per reductionem $\frac{6aabb}{d^3}$. Sed in hujusmodi casibus præstat ante operationem concinnare terminos, dividendo per maximum communem divisorem quos postea dividere oporteret. Sic in allato exemplo si dividam $2ab^3$ & bdd per communem divisorem b, & $3ccd$ ac $9acc$ per communem divisorem $3cc$; emerget fractio $\frac{2abb}{d}$ multiplicanda per $\frac{3a}{dd}$ vel dividenda per $\frac{dd}{3a}$ prodeunte tandem $\frac{6aabb}{d^3}$ ut supra. Atque ita $\frac{aa}{c}$, in $\frac{c}{b}$ evadit $\frac{aa}{1}$ in $\frac{1}{b}$ seu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{aa}{c}$ divis. per $\frac{b}{c}$ evadit aa divis. per b seu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{a^3-axx}{xx}$ in $\frac{cx}{aa+ax}$ evadit $\frac{a-x}{x}$ in $\frac{c}{1}$ seu $\frac{ac}{x}-c$. Et 28 divis. per $\frac{7}{3}$ evadit 4 divis. per $\frac{1}{3}$, seu 12.

De inventione Divisorum.

HUC spectat inventio divisorum per quos quantitas aliqua dividi possit. *Si quantitas simplex est divide eam per minimum ejus divisorem, & quotum per minimum divisorem ejus, donec quotus restet indivisibilis, & omnes quantitatis divisores primos habebis. Dein horum divisorum singulos binos, ternos, quaternos, &c. duc in se, & habebis etiam omnes divisores compositos.* Ut si numeri 60 divisores omnes desiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2, &

& quotum 15 per 3 & reſtabit quotus indiviſibilis 5. Ergo diviſores primi ſunt 1,2,2,3,5 : Ex binis compoſiti 4,6,10,15 : Ex ternis 12,20,30, ex omnibus 60. Rurſus ſi quantitatis $21abb$ diviſores omnes deſiderentur, divide eam per 3, & quotum $7abb$ per 7, & quotum abb per a, & quotum bb per b, & reſtabit quotus primus b. Ergo diviſores primi ſunt 1,3,7, a, b, b; ex binis compoſiti 21 $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, bb; ex ternis $21a$, $21b$, $3ab$, $3bb$, $7ab$, $7bb$, abb; ex quaternis $21ab$, $21bb$, $3abb$, $7abb$; ex quinis $21abb$. Eodem modo ipſius $2abb - 6aac$ diviſores omnes ſunt 1, 2, a, $bb - 3ac$, $2a$, $2bb - 6ac$, $abb - 3aac$, $2abb - 6aac$.

Si quantitas poſtquam diviſa eſt per omnes ſimplices diviſores manet compoſita & ſuſpicio eſt eam compoſitum aliquem diviſorem habere, diſpone eam ſecundum dimenſiones literæ alicujus quæ in ea eſt, & pro litera illa ſubſtitue ſigillatim tres vel plures terminos hujus progreſſionis Arithmeticæ, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, *ac terminos totidem reſultantes una cum omnibus eorum diviſoribus ſtatue è regione correſpondentium terminorum progreſſionis, poſitis diviſorum ſignis tam affirmativis quam negativis. Dein è regione etiam ſtatue progreſſiones arithmeticas quæ per omnium numerorum diviſores percurrunt pergentes à majoribus terminis ad minores eodem ordine quo termini progreſſionis* 3, 2, 1, 0, — 1, — 2 *pergunt, & quarum termini differunt vel unitate vel numero aliquo qui dividit altiſſimum terminum propoſitæ quantitatis. Siqua occurrit ejuſmodi progreſſio, iſte terminus ejus qui ſtat è regione termini* 0 *progreſſionis primæ, diviſus per differentiam terminorum, & cum ſigno ſuo annexus literæ præfatæ, componet quantitatem per quam diviſio tentanda eſt.*

Ut ſi quantitas ſit $x^3 - xx - 10x + 6$ pro x ſubſtituendo ſigillatim terminos progreſſionis 1, 0, — 1, orientur numeri — 4, 6, + 14 quos cum omnibus eorum diviſoribus colloco è regione terminorum progreſſionis 1, 0, — 1 hoc modo. Dein

Dein quoniam altissimus terminus x^3 per nullum numerum præter unitatem divisibilis est, quæro

1	4	1.2.4.	+ 4.
0	6	1.2.3.6	+ 3.
− 1	14	1.2.7.14	+ 2.

in divisoribus progressionem cujus termini differunt unitate, & a superioribus ad inferiora pergendo decrescunt perinde ac termini progressionis lateralis 1, 0, − 1. Et hujusmodi progressionem unicam tantum invenio nempe 4, 3, 2, cujus itaque terminum + 3 seligo qui stat è regione termini 0 progressionis primæ 1, 0, − 1, tentoque divisionem per $x + 3$. Et res succedit, prodeunte $xx - 4x + 2$.

Rursus si quantitas sit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$. pro y substituo sigillatim 2, 1, 0, − 1, − 2 & numeros resultantes 30, 7, 20, 3, 34 cum omnibus eorum divisoribus è regione colloco ut sequitur. Et in divisoribus hanc solam esse animadverto decrescentem progressionem arithmeticam + 10, + 7, + 4, + 1, − 2. Hujus terminorum differentia 3 dividit altissimum quantitatis terminum $6y^4$. Quare terminum + 4 qui stat è regione termini 0, divisum per differentiam terminorum 3 adjungo literæ y, tentoque divisionem per $y + \frac{4}{3}$ vel quod perinde est per $3y + 4$, & res succedit prodeunte $2y^3 - 3yy - 3y + 5$.

2	30	1.2.3.5.6.10.15.30	+ 10.
1	7	1.7	+ 7.
0	20	1.2.4.5.10.20	+ 4.
− 1	3	1.3	+ 1.
− 2	34	1.2.17.34	− 2.

Atque ita si quantitas sit $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140aa + 64a + 30$; operatio erit ut sequitur.

2	42	1.2.3.6.7.14.21.42.	+ 3. + 3. + 7.
1	23	1.23.	+ 1. − 1. + 1.
0	30	1.2.3.5.6.10.15.30.	− 1. − 5. − 5.
− 1	297	1.3.9.11.27.33.99.297.	− 3. − 9. − 11.

Tres

Tres occurrunt hic progressiones quarum termini $-1. -5. -5$. divisi per differentias terminorum $2, 4, 6$, dant tres divisores tentandos $a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{5}{4}$ & $a - \frac{5}{6}$. Et divisio per ultimum divisorem $a - \frac{5}{6}$ seu $6a - 5$ succedit prodeunte $4a^4 - 5a^3 + 4aa - 20a - 6$.

Si nullus occurrit hac methodo divisor, vel nullus qui dividit propositam quantitatem concludendum erit quantitatem illam non admittere divisorem unius dimensionis. Potest tamen fortasse, si plurium sit quam trium dimensionum, divisorem admittere duarum. Et si ita, divisor ille investigabitur hac methodo. *In quantitate illa pro litera substitue, ut ante, quatuor vel plures terminos progressionis hujus* $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$. *Divisores omnes numerorum resultantium sigillatim adde & subduc quadratis correspondentium terminorum progressionis illius ductis in divisorem aliquem numeralem altissimi termini quantitatis propositæ, & summas differentiasque è regione progressionis colloca. Dein progressiones omnes collaterales nota quæ per istas summas differentiasque percurrunt. Sit* $\mp C$ *terminus istiusmodi progressionis qui stat è regione termini* 0 *progressionis primæ,* $\mp B$ *differentia quæ oritur subducendo* $\mp C$ *de termino proxime superiori qui stat è regione termini* 1 *progressionis primæ,* A *prædictus termini altissimi divisor numeralis, &* l *litera quæ in quantitate proposita est, & erit* $All \pm Bl \pm C$ *divisor tentandus.*

Ut si quantitas proposita sit $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$, pro x scribo successivè $3, 2, 1, 0, -1, -2$, & prodeuntes numeros $39, 6, 1, -6, -21, -26$, una cum eorum divisoribus è regione dispono, addoque & subduco divisores terminis progressionis illius quadratis ductisque in divisorem numeralem termini x^4 qui unitas est, *viz.* terminis $9,4,1,0,1,4$, & summas differentiasque è latere pariter dispono. Dein progressiones quæ in iisdem obveniunt è latere

tere etiam ſcribo, ut ſequitur. Harum progreſſionum terminos 2 & − 3 qui ſtant è regione termini o progreſſionis illius quæ in columna prima

3	39	1.3.13.39.	9	− 30.−4.6.8.10.12.22.48.	− 4. 6.
2	6	1.2. 3. 6.	4	− 2.1.2.3.5. 6. 7.10.	− 2. 3.
1	1	1.	1	0. 2.	0. 0.
0	6	1.2. 3. 6.	0	− 6.−3.−2.−1.1.2.3.6.	2.−3.
−1	21	1.3. 7.21.	1	− 20.−6.−2.0.2.4. 8.22.	4.−6.
−2	26	1.2.13.26.	4	− 22.−9.2.3.5.6.17.30.	6.−9.

eſt, uſurpo ſucceſſive pro ∓ *C*, Differentias quæ oriuntur ſubducendo hos terminos de terminis ſuperioribus o & o nempe − 2 & + 3, uſurpo reſpectivè pro ∓ *B*. Unitatem item pro *A*; & *x* pro *l*. Et ſic pro *A ll* ± *Bl* ± *C* habeo diviſores duos tentandos $xx + 2x - 2$ & $xx - 3x + 3$, per quorum utrumque res ſuccedit.

Rurſus ſi proponatur quantitas $3y^5 - 6y^4 + y^3 - 8yy - 14y + 14$, Operatio erit ut ſequitur. Primo rem tento addendo & ſubducendo diviſores quadratis terminorum progreſſionis 2, 1, 0, 1 uſurpato 1 pro *A*, ſed res non ſuccedit. Quare pro *A*

3	170		27		−7. 1
2	38	1.2.19.38.	12	−26.−7.10.11.13.14.31.50.	−7. 11
1	10	1.2. 5.10.	3	− 7.−2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	−7. 5
0	14	1.2. 7.14.	0	−14.−7.−2.−1. 1.2 7.14.	−7.−1
−1	10	1.2. 5.10.	3	− 7.−2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	−7.−1
−2	190		12		−7.−1

uſurpo 3, alterum nempe termini altiſſimi $3y^5$ diviſorem numeralem, & quadratis iſtis multiplicatis per 3 hoc eſt numeris 12, 3, 0, 3 addo ſubducoque diviſores; & progreſſiones in terminis reſultantibus haſce duas invenio − 7, − 7, − 7, − 7 & 11. 5. − 1, − 7. Expeditionis gratia neglexeram diviſores extimorum numerorum 170 & 190. Quare continuatis progreſſionibus ſumo proximos earum hinc inde terminos, *viz.* − 7 & 17 ſuperius, & − 7,

-7, & -13 inferius, ac tento ſi ſubductis his de numeris 27 ac 12 qui ſtant è regione in quarta columna differentiæ dividunt iſtos 170 & 190 qui ſtant è regione in columna ſecunda. Et quidem differentia inter 27 & -7 id eſt 34 dividit 170 & differentia 12 & -7 id eſt 19 dividit 190. Item differentia inter 27 & 17 id eſt 10 dividit 170 ſed differentia inter 12 & -13 id eſt 25 non dividit 190. Quare poſteriorem progreſſionem rejicio. Juxta priorem $\mp C$ eſt -7, & $\mp B$ nihil; terminis progreſſionis nullam habentibus differentiam. Quare diviſor tentandus $All \pm Bl \pm C$, erit $3yy+7$. Et diviſio ſuccedit, prodeunte $y^3-2yy-2y+2$.

Si nullus inveniri poteſt hoc pacto diviſor qui ſuccedit, concludendum eſt quantitatem propoſitam non admittere diviſorem duarum dimenſionum. Poſſet eadem methodus extendi ad inventionem diviſorum dimenſionum plurium, quærendo in prædictis ſummis differentiiſque progreſſiones non arithmeticas quidem ſed alias quaſdem quarum terminorum differentiæ primæ, ſecundæ, tertiæ, &c. ſunt in arithmetica progreſſione: At in his Tyro non eſt detinendus.

Ubi in quantitate propoſita duæ ſunt literæ, & omnes ejus termini ad dimenſiones æquè altas aſcendunt; pro una iſtarum literarum pone unitatem, dein per regulas præcedentes quære diviſorem, ac diviſoris hujus comple deficientes dimenſiones reſtituendo literam illam pro unitate.

Ut ſi quantitas ſit $6y^4-cy^3-21ccyy+3c^3y+20c^4$ ubi termini omnes ſunt quatuor dimenſionum; pro c pono 1, quantitas evadit $6y^4-y^3-21yy+3y+20$, cujus diviſor ut ſupra eſt $3y+4$, & completa deficiente dimenſione poſterioris termini per dimenſionem c, fit $3y+4c$ diviſor quæſitus. Ita ſi quantitas ſit $x^4-bx^3-5bbxx+12b^3x-6b^4$; poſito 1 pro b, & quantitatis reſultantis $x^4-x^3-5xx+12x-6$ invento diviſore

$xx+$

$xx + 2x - 2$, compleo ejus deficientes dimenſiones per dimenſiones b, & ſic habeo diviſorem quæſitum $xx + 2bx - 2bb$.

Ubi in quantitate propoſita tres vel plures ſunt literæ, & ejus termini omnes ad eaſdem dimenſiones aſcendunt; poteſt diviſor per præcedentes regulas inveniri; ſed expeditius hoc modo: *Quære omnes diviſores terminorum omnium in quibus literarum aliqua non eſt, item terminorum omnium in quibus alia aliqua literarum non eſt, pariter & omnium in quibus tertia litera quartaque & quinta non eſt ſi tot ſunt literæ. Et ſic percurre omnes literas. Et è regione literarum colloca diviſores reſpectivè. Dein vide ſi in ſerie aliqua diviſorum per omnes literas pergente, partes omnes unicam tantum literam involventes tot vicibus reperiantur quot ſunt literæ una dempta in quantitate propoſita: Et partes duas literas involventes tot vicibus quot ſunt literæ demptis duabus in eadem quantitate. Si ita eſt; partes iſtæ omnes ſub ſignis ſuis ſemel ſumptæ erunt diviſor quæſitus.*

Ut ſi proponatur quantitas $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$; terminorum $8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$ in quibus non eſt x diviſores unius dimenſionis per præcedentes regulas inventi erunt $2b - 3c$ & $4b - 6c$; terminorum $12x^3 + 9cxx + 8ccx + 6c^3$ in quibus non eſt b, diviſor unicus $4x + 3c$; ac terminorum $12x^3 - 14bxx - 12bbx + 8b^3$ in quibus non eſt c, diviſores $2x - b$ & $4x - 2b$. Hos diviſores è regione literarum x, b, c diſpono ut hic vides.

x	$2b - 3c.\ 4b - 6c.$
b	$4x + 3c.$
c	$2x - b.\ 4x - 2b.$

Cum tres ſint literæ & diviſorum partes ſingulæ non niſi ſingulas literas involvant, in ſerie diviſorum debent partes illæ bis reperiri. At diviſorum $4b - 6c$ & $2x - b$ partes $4b$, $6c$, $2x$, b non niſi ſemel occurrunt. Extra diviſorem illum cujus ſunt partes non reperiuntur. Quare diviſores illos negligo.

Reſtant

Reſtant tantum tres diviſores $2b-3c$, $4x+3c$ & $4x-2b$. Hi in ſerie ſunt per omnes literas x, b, c pergente, & eorum partes ſingulæ $2b$, $3c$, $4x$, bis reperiuntur in ipſis ut oportuit, idque cum ſignis iiſdem, ſi modò ſigna diviſoris $2b-3c$ mutentur, & ejus loco ſcribatur $-2b+3c$. Nam ſigna diviſoris cujuſvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b$, $3c$, $4x$ ſemel ſub ſignis ſuis, & aggregatum $-2b+3c+4x$ diviſor erit quem invenire oportuit. Nam ſi per hunc dividas quantitatem propoſitam prodibit $3xx-2bx+2cc-4bb$.

Rurſus ſi quantitas ſit $12x^5-10ax^4-9bx^4-26aax^3+12abx^3+6bbx^3+24a^3xx-8aabxx-8abbxx-24b^3xx-4a^3bx+6aabbx-12ab^3x+18b^4x+12a^4b+32aab^3-12b^5$; diviſores terminorum in quibus x non eſt colloco è regione x; illos terminorum in quibus a non eſt, è regione a; & illos terminorum quibus b non eſt, è regione b, ut hic vides. Dein illos omnes qui ſunt unius

x	b, $2b$, $4b$, $aa+3bb$, $2aa+6bb$, $4aa+12bb$, $bb-3aa$, $2bb-6aa$, $4bb-12aa$.
a	$4xx-3bx+2bb$, $12xx-9bx+6bb$.
b	x, $2x$, $3x-4a$, $6x-8a$, $3xx-4ax$, $6xx-8ax$, $2xx+ax-3aa$, $4xx+2ax-6aa$.

dimenſionis rejiciendos eſſe ſentio, quia ſimplices b, $2b$, $4b$, x, $2x$, & partes compoſitorum $3x-4a$, $6x-8a$, non niſi ſemel in omnibus diviſoribus reperiantur; tres autem ſunt literæ in quantitate propoſita, & partes illæ unicam tantum involvunt, atque adeo bis reperiri deberent. Similiter diviſores duarum dimenſionum $aa+3bb$, $2aa+6bb$, $4aa+12bb$, $bb-3aa$ & $4bb-12aa$ rejicio, quia partes eorum aa, $2aa$, $4aa$, bb & $4bb$ unicam tantum literam a vel b involventes non niſi ſemel reperiuntur. Diviſoris autem $2bb-6aa$,

qui ſolus reſtat è regione x, partes $2bb$ & $6aa$ quæ ſimiliter unicam tantum literam involvunt, iterum reperiuntur, nempe pars $2bb$ in diviſore $4xx - 3bx + 2bb$ & pars $6aa$ in diviſore $4xx + 2ax - 6aa$. Quin etiam hi tres diviſores in ſerie ſunt, ſtantes è regione trium literarum x, a, b; & omnes eorum partes $2bb$, $6aa$, $4xx$ quæ unicam tantum literam involvunt bis reperiuntur in ipſis, idque ſub propriis ſignis; partes vero $3bx$, $2ax$ quæ duas literas involvunt non niſi ſemel occurrunt in ipſis. Quare horum trium diviſorum partes omnes diverſæ $2bb$, $6aa$, $4xx$, $3bx$, $2ax$ ſub ſignis ſuis connexæ, diviſorem deſideratum $2bb - 6aa + 4xx - 3bx + 2ax$ conflabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propoſitam & oritur $3x^3 - 4axx - 2aab - 6b^3$.

Si quantitatis alicujus termini omnes non ſunt æque alti, complendæ ſunt dimenſiones deficientes per dimenſiones literæ cujuſvis aſſumptæ, dein per præcedentes regulas invento diviſore, litera aſſumpta delenda eſt. Ut ſi quantitas ſit $12x^3 - 14bxx + 9xx - 12bbx - 6bx + 8x + 8b^3 - 12bb - 4b + 6$; aſſume literam quamvis c, & per dimenſiones ejus comple dimenſiones quantitatis propoſitæ ad hunc modum $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$. Dein hujus diviſore $4x - 2b + 3c$, invento dele c; & habebitur diviſor deſideratus $4x - 2b + 3$.

Aliquando diviſores facilius quam per has regulas inveniri poſſunt. Ut ſi litera aliqua in quantitate propoſita ſit unius tantum dimenſionis; quærendus erit maximus communis diviſor terminorum in quibus litera illa reperitur, & reliquorum terminorum in quibus non reperitur, nam diviſor ille totam dividet. Et ſi nullus eſt ejuſmodi communis diviſor, nullus erit diviſor totius. Exempli gratia, ſi proponatur quantitas $x^4 - 3ax^3 - 8aa$

$-8aaxx+18a^3x+cx^3-acxx-8aacx$ $+6a^3c-8a^4$; quæratur communis divisor terminorum $+cx^3-acxx-8aacx+6a^3c$ in quibus c unius est tantum dimensionis, & terminorum reliquorum $x^4-3ax^3-8aaxx+18a^3x-8a^4$ ac divisor ille nempe $xx+2ax-2aa$ dividet totam quantitatem.

Cæterum maximus duorum numerorum divisor communis, si prima fronte non innotescit, invenitur perpetua ablatione minoris de majori & reliqui de ablato. Nam quæsitus erit divisor qui tandem nihil relinquit. Sic ad inveniendum maximum communem divisorem numerorum 203 & 667, aufer ter 203 de 667, & reliquum 58 ter de 203, & reliquum 29 bis de 58, restabitque nihil: Quod indicat 29 esse divisorem quæsitum.

Haud secus in speciebus communis divisor; ubi compositus est, invenitur subducendo alterutram quantitatem, aut multiplicem ejus de altera: Si modò & quantitates illæ & residuum juxta literæ alicujus dimensiones ut Divisione ostensum est, ordinentur, & qualibet vice concinnentur dividendo ipsas per suos omnes divisores qui aut simplices sunt, aut singulos terminos instar simplicium dividunt. Sic ad inveniendum communem divisorem Numeratoris ac Denominatoris fractionis hujus $\frac{x^4-3ax^3-8aaxx+18a^3x-8a^4}{x^3-axx-8aax+6a^3}$, multiplica Denominatorem per x ut primus ejus terminus evadat idem cum primo termino numeratoris. Dein aufer, & restabit $-2ax^3+12a^3x-8a^4$, quod concinnatum dividendo per $-2a$ evadit $x^3-6aax+4a^3$. Hoc aufer de Denominatore & restabit $-axx-2aax+2a^3$. Quod itidem per $-a$ divisum fit $xx+2ax-2aa$. Hoc autem per x multiplica, ut ejus primus terminus evadat idem cum primo termino novissimi ablati $x^3-6aax+4a^3$, de quo auferendum est; & re-

ſtabit $-2axx-4aax+4a^3$, quod per $-2a$ diviſum fit etiam $xx+2ax-2aa$. Et hoc cum idem ſit ac ſuperius reſiduum, proindeque ablatum relinquat nihil, quæſitus erit diviſor per quem fractio propoſita, factâ Numeratoris ac Denominatoris diviſione, reduci poteſt ad ſimpliciorem, nempe ad $\frac{xx-5ax+4aa}{x-3a}$.

Atque ita ſi habeatur fractio

$$\frac{6a^5+15a^4b-4a^3cc-10aabcc}{9a^3b-27aabc-6abcc+18bc^3},$$

termini ejus imprimis abbreviandi ſunt dividendo numeratorem per aa ac Denominatorem per $3b$. Dein ablato bis $3a^3-9aac-2acc+6c^3$ de $6a^3+15aab-4acc-10bcc$, reſtabit $\begin{matrix}15b\\+18c\end{matrix}aa\begin{matrix}-10bcc\\-12c^3\end{matrix}$. Quod concinnatum dividendo terminum utrumque per $5b+6c$ perinde ac ſi $5b+6c$ ſimplex eſſet quantitas, evadit $3aa-2cc$. Hoc multiplicatum per a aufer de $3a^3-9aac-2acc+6c^3$ & ſecunda vice reſtabit $-9aac+6c^3$ quod itidem concinnatum per applicationem ad $-3c$, evadit etiam $3aa-2cc$ ut ante. Quare $3aa-2cc$ quæſitus eſt diviſor. Quo invento, divide per eum partes fractionis propoſitæ & obtinebitur $\frac{2a^3+5aab}{3ab-9bc}$.

Quod ſi diviſor communis hoc pacto non inveniatur, certum eſt nullum omninò exiſtere, niſi forſan è terminis prodeat per quos Numerator ac Denominator fractionis abbreviantur. Ut ſi habeatur fractio $\frac{aadd-ccdd-aacc+c^4}{4aad-4acd-2acc+2c^3}$, ac termini ejus juxta dimenſiones literæ d diſponantur ita ut Numerator evadat $\begin{matrix}aa\\-cc\end{matrix}dd\begin{matrix}-aacc\\+c^4\end{matrix}$ ac Denominator

ñator $\begin{matrix} 4aa \\ -4ac \end{matrix} d \begin{matrix} -2acc \\ +2c^3 \end{matrix}$. Hos imprimis oportet abbreviare dividendo utrumque Numeratoris terminum per $aa - cc$ & utrumque Denominatoris per $2a - 2c$ perinde ac si $aa - cc$ & $2a - 2c$ essent simplices quantitates. Atque ita vice Numeratoris emerget $dd - cc$, & vice Denominatoris $2ad - cc$, ex quibus sic præparatis nullus communis divisor obtineri potest. Sed è terminis $aa - cc$ & $2a - 2c$ per quos Numerator ac Denominator abbreviati sunt, prodit ejusmodi divisor, nempe $a - c$, cujus ope fractio ad hanc $\frac{add + cdd - acc - c^3}{4ad - 2cc}$ reduci potest. Quod si neque termini $aa - cc$ & $2a - 2c$ communem divisorem habuissent, fractio proposita fuisset irreducibilis.

Et hæc generalis est methodus inveniendi communes divisores: *Sed plerumque expeditius inveniuntur quærendo omnes alterutrius quantitatis divisores primos, hoc est, qui per alios dividi nequeunt, ac dein tentando siqui alteram divident absque residuo.* Sic ad reducendum $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ ad minimos terminos, inveniendi sunt divisores quantitatis $aa - ab$ nempe a & $a - b$. Dein tentandum est an alterute a vel $a - b$ dividet etiam $a^3 - aab + abb - b$ absque residuo.

De REDUCTIONE FRACTIONUM *ad communem Denominatorem.*

FRactiones ad communem Denominatorem reducuntur multiplicando terminos utriusque per denominatorem alterius.

Sic habitis $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, duc terminos unius $\frac{a}{b}$ in d, & vicissim terminos alterius $\frac{c}{d}$ in b, & evadent $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, quarum communis est denominator bd. Atque ita a & $\frac{ab}{c}$ sive $\frac{a}{1}$ & $\frac{ab}{c}$ evadunt $\frac{ac}{c}$ & $\frac{ab}{c}$. Ubi verò Denominatores communem habent divisorem, sufficit multiplicare alternè per Quotientes. Sic fractiones $\frac{a^3}{bc}$ & $\frac{a^3}{bd}$ ad hasce $\frac{a^3d}{bcd}$ & $\frac{a^3c}{bcd}$ reducuntur, multiplicando alternè per Quotientes c ac d ortos divisione denominatorum per communem divisorem b.

Hæc autem reductio præcipuè usui est in Additione & Subductione fractionum, quæ si diversos habent denominatores, ad eundem reducendæ sunt antequam uniri possunt. Sic $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ per reductionem evadit $\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$, sive $\frac{ad+bc}{bd}$. Et $a + \frac{ab}{c}$ evadit $\frac{ac+ab}{c}$. Et $\frac{a^3}{bc} - \frac{a^3}{bd}$ evadit $\frac{a^3d - a^3c}{bcd}$ vel

$d - c$

$\frac{d-c}{bcd}a^3$. Et $\frac{c^4+x^4}{cc-xx}-cc-xx$ evadit $\frac{2x^4}{cc-xx}$. Atque ita $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$ evadit $\frac{14}{21}+\frac{15}{21}$ ſive $\frac{14+15}{21}$ hoc eſt $\frac{29}{21}$. Et $\frac{11}{6}-\frac{3}{4}$ evadit $\frac{22}{12}-\frac{9}{12}$ ſive $\frac{13}{12}$. Et $\frac{3}{4}-\frac{5}{12}$ evadit $\frac{9}{12}-\frac{5}{12}$ ſive $\frac{4}{12}$ hoc eſt $\frac{1}{3}$. Et $3\frac{4}{7}$ ſive $\frac{3}{1}+\frac{4}{7}$ evadit $\frac{21}{7}+\frac{4}{7}$ ſive $\frac{25}{7}$. Et $25\frac{1}{2}$ evadit $\frac{51}{2}$.

Fractiones ubi plures ſunt gradatim uniri debent. Sic habito $\frac{aa}{x}-a+\frac{2xx}{3a}-\frac{ax}{a-x}$; ab $\frac{aa}{x}$ aufer a & reſtabit $\frac{aa-ax}{x}$, huic adde $\frac{2xx}{3a}$ & prodibit $\frac{3a^3-3aax+2x^3}{3ax}$ unde aufer denique $\frac{ax}{a-x}$ & reſtabit $\frac{3a^4-6a^3x+2ax^3-2x^4}{3aax-3axx}$. Atque ita ſi habeatur $3\frac{4}{7}-\frac{2}{3}$, imprimis aggregatum $3\frac{4}{7}$ inveniendum eſt nempe $\frac{25}{7}$ dein ab hoc auferendum $\frac{2}{3}$ & reſtabit $\frac{61}{21}$.

De REDUCTIONE RADICALIUM *ad minimos terminos.*

R*Adicalis ubi totius radix extrahi nequit, plerumque concinnatur extrahendo radicem diviſoris alicujus.* Sic $\sqrt{aabc}$ extrahendo radicem diviſoris aa fit $a\sqrt{bc}$. Et $\sqrt{48}$ extrahendo radicem diviſoris 16 fit $4\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48aabc}$ extrahendo radicem diviſoris $16aa$ fit $4a\sqrt{3bc}$. Et $\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$ extrahendo radicem diviſoris $\frac{aa-4abb+4bb}{cc}$

fit $\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$ extrahendo radicem diviforis $\frac{aamm}{ppzz}$ fit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$. Et $6\sqrt{\frac{75}{98}}$ extrahendo radicem diviforis $\frac{25}{49}$ fit $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, five $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}$ radicem que denominatoris adhuc extrahendo, fit $\frac{15}{7}\sqrt{6}$. Et fic $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ five $a\sqrt{\frac{ab}{aa}}$ extrahendo radicem denominatoris fit $\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}$ extrahendo radicem cubicam diviforis $8a^3$ fit $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}$. Haud fecus $\sqrt{4}\,a^3x$ extrahendo radicem quadraticam diviforis aa fit $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4}\,ax$ vel extrahendo radicem quadrato-quadraticam diviforis a^4 fit $a\sqrt{4}\,\frac{x}{a}$. Atque ita $\sqrt{6}:a^7x^5$ convertitur in $a\sqrt{6}:ax^5$, vel in $ax\sqrt{6}:\frac{a}{x}$ vel in $\sqrt{ax}\times\sqrt{3}:aax$.

Cæterùm hæc reductio non tantùm concinnandis radicalibus infervit, fed & earum Additioni & Subductioni, fi modò ex parte radicali conveniant ubi ad formam fimpliciffimam reducuntur. Tunc enim uniri poffunt, quod aliter non fit. Sic $\sqrt{48}+\sqrt{75}$ per reductionem evadit $4\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ hoc eft $9\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{16}{27}}$ per reductionem evadit $4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}$ hoc eft $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. Et fic $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}}+\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$ extrahendo quicquid eft rationale, evadit $\frac{2b}{c}\sqrt{ab}+\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$ hoc eft $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}-\sqrt{3}:\overline{b^4+2ab^3}$ evadit $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}-b\sqrt{3}:\overline{b+2a}$ hoc eft $\overline{2a-b}\sqrt{3}:\overline{b+2a}$.

De

De REDUCTIONE RADICALIUM *ad eandem denominationem.*

CUM in radicalibus diversæ denominationis instituenda est multiplicatio vel divisio, oportet omnes ad eandem denominationem reducere, idque præfigendo signum radicale cujus index est minimus numerus quem earum indices dividunt absque residuo, & suffixas quantitates toties dempta una vice in se ducendo quoties index ille jam major evaserit.

Sic enim $\sqrt{ax}$ in $\sqrt{3}:aax$ evadit $\sqrt{6}:a^3x^3$ in $\sqrt{6}:a^4xx$ hoc est $\sqrt{6}:a^7x^5$. Et $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4}:ax$ evadit $\sqrt{4}:aa$ in $\sqrt{4}:ax$ hoc est $\sqrt{4}:a^3x$. Et $\sqrt{6}$ in $\sqrt{4}:\frac{5}{6}$ evadit $\sqrt{4}:36$ in $\sqrt{4}:\frac{5}{6}$ hoc est $\sqrt{4}:30$. Eadem ratione $a\sqrt{bc}$ evadit $\sqrt{aa}$ in $\sqrt{bc}$ hoc est $\sqrt{aabc}$. Et $4a\sqrt{3bc}$ evadit $\sqrt{16aa}$ in $\sqrt{3bc}$ hoc est $\sqrt{48aabc}$. Et $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}$ evadit $\sqrt{3}:8a^3$ in $\sqrt{3}:\overline{b+2a}$ hoc est $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}$. Atque ita $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ fit $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bb}}$ sive $\sqrt{\frac{ac}{bb}}$. Et $\frac{6abb}{\sqrt{18ab^3}}$ fit $\frac{\sqrt{36aab^4}}{\sqrt{18ab^3}}$ sive $\sqrt{2ab}$. Et sic in aliis.

De REDUCTIONE RADICALIUM *ad simpliciores radicales per extractionem radicum.*

RAdices quantitatum quæ ex integris & radicalibus quadraticis componuntur sic extrahe. *Designet* A *quantitatis alicujus partem majorem,* B *partem minorem; Et erit* $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum*

majo-

majoris partis radicis; & $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum partis minoris, quæ quidem majori adnectenda est cum signo ipsius* B.

Ut si quantitas sit $3+\sqrt{8}$, scribendo 3 pro A, & $\sqrt{8}$ pro B, erit $\sqrt{AA-BB}=1$, indeque quadratum majoris partis radicis $\frac{3+1}{2}$ id est 2, & quadratum minoris partis $\frac{3-1}{2}$ id est 1. Ergo radix est $1+\sqrt{2}$. Rursus si ex $\sqrt{32}-\sqrt{24}$ radix extrahenda sit, ponendo $\sqrt{32}$ pro A & $\sqrt{24}$ pro B erit $\sqrt{AA-BB}=\sqrt{8}$, & inde $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{8}}{2}$ & $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2}$ hoc est $3\sqrt{2}$ & $\sqrt{2}$ quadrata partium radicis. Radix itaque est $\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$. Eodem modo si de $aa+2x\sqrt{aa-xx}$ radix extrahi debet, pro A scribe aa, & pro B $2x\sqrt{aa-xx}$ & erit $AA-BB=a^4-4aaxx+4x^4$. Cujus radix est $aa-2xx$. Unde quadratum unius partis radicis erit $aa-xx$, illud alterius xx; adeoque radix $x+\sqrt{aa-xx}$. Rursus si habeatur $aa+5ax-2a\sqrt{ax+4xx}$, scribendo $aa+5ax$ pro A & $2a\sqrt{ax+4xx}$ pro B, fiet $AA-BB=a^4+6a^3x+9aaxx$ cujus radix est $aa+3ax$. Unde quadratum majoris partis radicis erit $aa+4ax$, illud minoris ax, & radix $\sqrt{aa+4ax}-\sqrt{ax}$. Denique si habeatur $6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$, ponendo $6+\sqrt{8}=A$ & $-\sqrt{12}-\sqrt{24}=B$ fiet $AA-BB=8$. Unde radicis pars major $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ hoc est (ut supra) $1+\sqrt{2}$, & pars minor $\sqrt{3}$, atque adeo radix ipsa $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Cæterum ubi

plures

plures sunt hujusmodi termini radicales, possunt partes radicis citius inveniri dividendo factum quarumvis duarum radicalium per tertiam aliquam radicalem quæ producit quotum rationalem & integrum. Nam Quoti istius radix erit duplum partis radicis quæsitæ. Ut in exemplo novissimo $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{12}}{\sqrt{24}} = 2, \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 4, \frac{\sqrt{12} \times \sqrt{24}}{\sqrt{8}} = 6.$ Ergo partes radicis sunt 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ut supra.

Est & regula extrahendi altiores radices ex quantitatibus numeralibus duarum potentia commensurabilium partium.

Sit quantitas $A \pm B$. *Ejus pars major* A. *Index radicis extrahendæ c. Quære minimum numerum n, cujus potestas* n^c *dividitur per* $AA - BB$ *sine residuo, & sit quotus* Q. *Computa* $\sqrt[c]{A + B} \times \sqrt{Q}$ *in numeris integris proximis. Sit illud r. Divide* $A \sqrt{Q}$ *per maximum divisorem rationalem: Sit quotus s, sitque* $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ *in numeris integris proximis t. Et erit* $\frac{ts \pm \sqrt{tts - n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ *radix quæsita, si modo radix extrahi potest.*

Ut si radix cubica extrahenda sit ex $\sqrt{968} + 25$; erit $AA - BB = 343$; ejus divisores 7, 7, 7; ergo $n = 7$ & $Q = 1$. Porro $\overline{A + B} \times \sqrt{Q}$ seu $\sqrt{968} + 25$ extracta prioris partis radice sit paulo major quam 56; ejus radix cubica in numeris proximis est 4. Ergo $r = 4$. Insuper $A \sqrt{Q}$ seu $\sqrt{968}$ extrahendo quicquid rationale est fit $22\sqrt{2}$. Ergo $\sqrt{2}$ ejus pars radicalis est s, & $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ seu $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ in numeris integris proximis est 2. Ergo $t = 2$.

Denique

Denique ts eſt $2\sqrt{2}$, $\sqrt{ttss-n}$ eſt 1 & $\sqrt[2c]{Q}$ ſeu $\sqrt[5]{1}$ eſt 1. Ergo $2\sqrt{2}+1$ eſt radix quæſita ſi modo radix extrahi queat. Tento itaque per multiplicationem ſi cubus ipſius $2\sqrt{2}+1$ ſit $\sqrt{968}+25$ & res ſuccedit.

Rurſus ſi radix cubica extrahenda ſit ex $68-\sqrt{4374}$; erit $AA-BB=250$, Cujus diviſores ſunt 5, 5, 5, 2. Ergo $n=5\times 2=10$, & $Q=4$. Et $\sqrt[c]{\overline{A+B}\times\sqrt{Q}}$ ſeu $\sqrt[3]{\overline{68+\sqrt{4374}}\times 2}$ in numeris proximis integris eſt $7=r$. Inſuper $A\sqrt{Q}$ ſeu $68\sqrt{4}$ extrahendo quicquid rationale eſt fit $136\sqrt{1}$. Ergo $s=1$, & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ ſeu $\frac{7+\frac{10}{7}}{2}$ in numeris integris proximis eſt $4=t$: Ergo $ts=4$, $\sqrt{ttss-n}=\sqrt{6}$ & $\sqrt[2c]{Q}=\sqrt[6]{4}$ ſeu $\sqrt[3]{2}$ atque adeo radix tentanda $\frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Iterum ſi radix quadrato-cubica extrahenda ſit ex $29\sqrt{6}+41\sqrt{3}$; erit $AA-BB=3$, adeoque $n=3$, $Q=81$, $r=5$, $s=\sqrt{6}$, $t=1$, $ts=\sqrt{6}$, $\sqrt{ttss-n}=\sqrt{3}$ & $\sqrt[2c]{Q}=\sqrt[10]{81}$ ſeu $\sqrt[5]{9}$ atque adeo radix tentanda $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

Cæterum in hujuſmodi operationibus ſi quantitas fractio ſit vel partes ejus communem habent diviſorem; radices denominatoris & factorum ſeorſim extrahe. Ut ſi ex $\sqrt{242}-12\frac{1}{2}$ radix cubica extrahenda ſit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\frac{\sqrt{968}-25}{2}$. Dein

extracta

extracta seorsim numeratoris ac denominatoris radice cubica orietur $\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt[3]{2}}$. Rursus si ex $\sqrt[3]{3993} + \sqrt[6]{17578125}$ radix aliqua extrahenda sit; divide partes per communem divisorem $\sqrt[3]{3}$, & emerget $11 + \sqrt{125}$. Unde quantitas proposita valet $\sqrt[3]{3}$ in $\overline{11 + \sqrt{125}}$, cujus radix invenietur extrahendo seorsim radicem factoris utriusque $\sqrt[3]{3}$ & $11 + \sqrt{125}$.

De forma ÆQUATIONIS.

ÆQUATIONES, quæ sunt quantitatum aut sibi mutuo æqualium, aut simul nihilo æquipollentium congeries, duobus præcipuè modis considerandæ veniunt; vel ut ultimæ conclusiones ad quas in Problematis solvendis deventum est, vel ut media quorum ope finales æquationes acquirendæ sunt. Prioris generis æquatio ex unica tantum incognita quantitate cognitis involuta conflatur, modò Problema sit definitum & aliquid certi quærendum innuat. Sed eæ posterioris generis involvunt plures quantitates incognitas quæ ideo debent inter se comparari & ita connecti ut ex omnibus una tandem emergat æquatio nova cui inest unica quam quærimus incognita quantitas admista cognitis. Quæ quantitas ut exinde facilius eliciatur, æquatio ista variis plerumque modis transformanda est, donec evadat ea simplicissima quæ potest, atque etiam similis alicui ex sequentibus earum gradibus, in quibus x designat quantitatem quæsitam ad cujus dimensiones termini, ut vides, ordinantur, & p, q, r, s alias quascunque quantitates ex quibus

quibus determinatis & cognitis etiam x determinatur, & per methodos explicandas investigari potest.

$x=p.$	$x-p\ =o.$
$xx=px\ +q.$	Vel $xx-px-q=o.$
$x^3=pxx+qx\ +r.$	$x^3-pxx-qx\ -r=o.$
$x^4=px^3+qxx+rx+s.$	$x^4-px^3-qxx-rx-s=o.$
&c.	&c.

Ad horum normam itaque termini æquationum secundum dimensiones incognitæ quantitatis in ordinem semper redigendi sunt, ita ut primum locum occupent in quibus incognita quantitas est plurimarum dimensionum, instar x, xx, x^3, x^4, & secundum locum in quibus ea est una dimensione minor, instar p, px, pxx, px^3, & sic præterea. Et quod signa terminorum attinet, possunt ea omnibus modis se habere: Imò & unus vel plures ex intermediis terminis aliquando deesse. Sic $x^3 * - bbx + b^3 = o$ vel $x^3 = bbx - b^3$, est æquatio tertii gradus, $Z^4 \begin{matrix}+a\\-b\end{matrix} Z^3 * \begin{matrix}+ab^3\\-b^4\end{matrix} = o$ æquatio quarti. Nam gradus æquationum æstimantur ex maxima dimensione quantitatis incognitæ, nullo respectu ad quantitates cognitas habito, nec ad intermedios terminos. Attamen ex defectu intermediorum terminorum æquatio plerumque fit multò simplicior, & nonnunquam ad gradum inferiorem quodammodo deprimitur. Sic enim $x^4 = qxx + s$ æquatio secundi gradus censenda est, siquidem ea in duas secundi gradus æquationes resolvi potest. Nam supposito $xx = y$, & y pro xx in æquatione illa perinde scripto, ejus vice prodibit $yy = qy + s$, æquatio secundi gradus; cujus ope cum y inventa fuerit, æquatio $xx = y$ secundi etiam gradus, dabit x.

Atque

Atque hæ ſunt concluſiones ad quas Problemata deduci debent. Sed antequam eorum reſolutionem aggrediar, opus erit ut modos transformandi & in ordinem redigendi æquationes, & ex mediis eliciendi finales æquationes abſtracte doceam. Æquationis autem ſolitariæ reductionem in ſequentibus regulis complectar.

De concinnanda Æquatione ſolitaria.

REG. I. *Siquæ ſunt quantitates quæ ſe mutuo deſtruere, vel per Additionem aut Subductionem coaleſcere poſſunt, termini perinde minuendi ſunt.*

Veluti ſi habeatur $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$ aufer utrinque $2x$ & adde $3a$ proditque $5b = 8a + x$. Atque ita $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$, delendo æquipollentes $\frac{2ab}{a} - b = b$, evadit $\frac{bx}{a} = a$.

Ad hanc Regulam referri debet etiam ordinatio terminorum æquationis quæ fieri ſolet per tranſlationem ad contrarias partes cum ſigno contrario. Ut ſi habita æquatione $5b = 8a + x$ deſideretur x; aufer utrinque $8a$, vel, quod eodem recidit, transfer $8a$ ad contrarias partes cum ſigno mutato, & prodibit $5b - 8a = x$. Eodem modo ſi habeatur $aa - 3ay = ab - bb + by$ ac deſideretur y, transpone $-3ay$ & $ab - bb$, eo ut ex una parte conſiſtant termini multiplicati per y, & ex altera reliqui termini, & prodibit $aa - ab + bb = 3ay + by$, unde y elicietur per Reg. 5. ſequentem, dividendo ſcilicet utramque partem per $3a + b$, prodibit enim $\frac{aa - ab + bb}{3a + b} = y$. Atque ita æquatio

abx

$abx + a^3 - aax = abb - 2abx - x^3$ per debitam transpositionem & ordinationem evadit $x^3 = \begin{matrix} aa \\ -3ab \end{matrix} x \begin{matrix} -a^3 \\ +abb \end{matrix}$ vel $x^3 \begin{matrix} -aa \\ +3ab \end{matrix} x \begin{matrix} +a^3 \\ -abb \end{matrix} = 0.$

R E G. II. *Siqua compareat quantitas per quam omnes æquationis termini multiplicantur, debent omnes per illam quantitatem dividi; vel si per eandem quantitatem omnes dividantur debent omnes per illam multiplicari.*

Sic habito $15bb = 24ab + 3bx$, divide terminos omnes per b & fit $15b = 24a + 3x$. Deinde per 3 & fit $5b = 8a + x$. Vel habito $\frac{b^3}{ac} - \frac{bbx}{cc} = \frac{xx}{c}$ multiplica omnes per c & prodit $\frac{b^3}{a} - \frac{bbx}{c} = xx$.

R E G. III. *Siqua sit fractio irreducibilis in cujus denominatore reperiatur litera illa ad cujus dimensiones æquatio ordinanda est, omnes æquationis termini per istum denominatorem, aut per aliquem divisorem ejus multiplicandi sunt.*

Ut si æquatio $\frac{ax}{a-x} + b = x$ secundum x ordinanda sit, multiplicentur omnes ejus termini per $a - x$ denominatorem fractionis $\frac{ax}{a-x}$ siquidem x inibi reperiatur, & prodit $ax + ab - bx = ax - xx$, seu $ab - bx = -xx$, & facta utriusque partis translatione $xx = bx - ab$. Atque ita si habeatur $\frac{a^3 - abb}{2cy - cc} = y - c$ terminique juxta y ordinandi sint multiplicentur per denominatorem $2cy - cc$ vel saltem per divisorem $2y - c$ quo y tollatur è denominatore & exurget $\frac{a^3 - abb}{c}$ $= 2yy$

$= 2yy - 3cy + cc$ & ordinando $\frac{a^3 - abb}{c} - cc + 3cy = 2yy$. Ad eundem modum $\frac{aa}{x} - a = x$ multiplicando per x evadit $aa - ax = xx$, & $\frac{aabb}{cxx} = \frac{xx}{a+b-x}$ multiplicando primo per xx, dein per $a + b - x$ evadit $\frac{a^3bb + aab^3 - aabbx}{c} = x^4$.

R E G. IV. *Sicui surdæ quantitati irreducibili litera illa involvatur ad cujus dimensiones æquatio ordinanda est, cæteri omnes termini ad contrarias partes cum signis mutatis transferendi sunt, & utraque pars æquationis in se* semel *multiplicanda si radix* quadratica *sit, vel* bis *si sit* cubica, *&c.*

Sic ad ordinandum juxta x æquationem $\sqrt{aa - ax} + a = x$, transferatur a ad alteras partes, fitque $\sqrt{aa - ax} = x - a$; & quadratis partibus, $aa - ax = xx - 2ax + aa$, seu $0 = xx - ax$ hoc est $x = a$. Sic etiam $\sqrt{3}: \overline{aax + 2axx - x^3} - a + x = 0$, transponendo $-a + x$ evadit $\sqrt{3}: \overline{aax + 2axx - x^3} = a - x$, & partibus cubicè multiplicatis $aax + 2axx - x^3 = a^3 - 3aax + 3axx - x^3$, seu $xx = 4ax - aa$. Et sic $y = \sqrt{ay + yy - a\sqrt{ay - yy}}$ quadratis partibus evadit $yy = ay + yy - a\sqrt{ay - yy}$ & terminis debitè transpositis $ay = a\sqrt{ay - yy}$ seu $y = \sqrt{ay - yy}$, & partibus iterum quadratis $yy = ay - yy$, & transponendo denuo, $2yy = ay$ sive $2y = a$.

R E G. V. *Terminis secundum Dimensiones literæ alicujus ope præcedentium regularum dispositis, si maxima ejusdem literæ dimensio per cognitam quamlibet quantitatem multiplicetur, debet tota æquatio per eandem dividi.*

Sic $2y = a$ dividendo per 2 evadit $y = \frac{1}{2}a$. Et $\frac{bx}{a} = a$ dividendo per $\frac{b}{a}$ evadat $x = \frac{aa}{b}$. Et $\begin{matrix}2ac\\-cc\end{matrix}\, x^3 \begin{matrix}+a^3\\+aac\end{matrix}\, xx \begin{matrix}-2a^3c\\+aacc\end{matrix}\, x - a^3cc = 0$ dividendo per $2ac - cc$ evadit

$$x^3 + \frac{\begin{matrix}a^3\\aac\end{matrix}\, xx \begin{matrix}-2a^3c\\+aacc\end{matrix}\, x - a^3cc}{2ac - cc} = 0,$$

five $x^3 + \frac{a^3 + aac}{2ac - cc}\, xx - aax - \frac{a^3c}{2a - c} = 0.$

Reg. VI. *Aliquando reductio institui potest dividendo æquationem per compositam aliquam quantitatem.*

Sic enim $y^3 = \begin{matrix}-\\+\end{matrix}\begin{matrix}2c\\b\end{matrix}\, yy + 3bcy - bbc$, ad hanc $yy = -2cy + bc$ reducitur transferendo terminos omnes ad easdem partes hoc modo, $y^3 \begin{matrix}+\\-\end{matrix}\begin{matrix}2c\\b\end{matrix}\, yy - 3bcy + bbc = 0$, & dividendo per $y - b$ ut in capite de divisione ostensum est: Prodibit enim $yy + 2cy - bc = 0$. Ast hujusmodi divisorum inventio difficilis est & eam prius docuimus.

Reg. VII. *Aliquando etiam reductio per extractionem radicis ex utraque æquationis parte instituitur.*

Quemadmodum si habeatur $xx = \frac{1}{4}aa - bb$, extracta utrobique radice prodit $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Quod si habeatur $xx + aa = 2ax + bb$ transfer $2ax$ & exurget $xx - 2ax + aa = bb$, extractisque partium radicibus $x - a = +$ vel $-b$, seu $x = a \pm b$. Sic etiam habito $xx = ax - bb$, adde utrinque $-ax + \frac{1}{4}aa$ & prodit $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$, & extracta utrobique radice $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ seu $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$

Et.

Et sic universaliter: Si sit $xx = \cdot px \cdot q$, erit $x = \cdot \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp \cdot q}$. Ubi $\frac{1}{2}p$ & q iisdem signis ac p & q in æquatione priori afficienda sunt; sed $\frac{1}{4}pp$ semper affirmativè ponendum. Estque hoc exemplum Regula ad cujus similitudinem æquationes omnes quadraticæ ad formam simplicium reduci possunt. E. g. Proposita æquatione $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$, ad extrahendam radicem y confer $\frac{2xx}{a}$ cum p, & xx cum q, hoc est scribe $\frac{xx}{a}$ pro $\frac{1}{2}p$ & $\frac{x^4}{aa} + xx$ pro $\frac{1}{4}pp \cdot q$, atque orietur $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$ vel $y = \frac{xx}{a} - \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. Eodem modo æquatio $yy = ay - 2cy + aa - cc$ conferendo $a - 2c$ cum p, & $aa - cc$ cum q, dabit $y = \frac{1}{2}a - c + \sqrt{\frac{1}{4}aa - ac}$. Quinetiam æquatio quadrato-quadratica $x^4 = -aaxx + ab^3$ cujus termini impares desunt, ope hujus regulæ evadit $xx = -\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^3}$, & extracta iterum radice $x = \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^3}}$. Et sic in aliis.

Suntque hæ regulæ pro concinnanda æquatione solitaria, quarum usum cum Analysta satis perspexerit, ita ut æquationem quamcunque propositam secundum quamlibet literarum in ea complexarum disponere noverit, & ejusdem literæ si ea unius sit dimensionis, aut maximæ potestatis ejus si plurium, valorem elicere: Haud difficilem sentiet comparationem plurium æquationum inter se; quam pergo jam docere.

De duabus pluribusve æquationibus in unam transformandis ut incognitæ quantitates exterminentur.

CUM in alicujus problematis solutionem plures habentur æquationes statum quæstionis comprehendentes, quarum unicuique plures etiam incognitæ quantitates involvuntur; æquationes istæ (duæ per vices si modo sint plures duabus) sunt ita connectendæ ut una ex incognitis quantitatibus per singulas operationes tollatur, & emergat æquatio nova. Sic habitis æquationibus $2x = y + 5$, & $x = y + 2$, demendo æqualia ex æqualibus prodibit $x = 3$. Et sciendum est quod per quamlibet æquationem una quantitas incognita potest tolli, atque adeo cum tot sunt æquationes quot quantitates incognitæ, omnes possunt ad unam denique reduci in qua unica manebit quantitas incognita. Sin quantitates incognitæ sint unâ plures quàm æquationes habentur tum in æquatione ultimò resultante duæ manebunt quantitates incognitæ, & si sint duabus plures quàm æquationes habentur tum in æquatione ultimò resultante manebunt tres, & sic præterea.

Possunt etiam duæ vel plures quantitates incognitæ per duas tantum æquationes fortasse tolli. Ut si sit $ax - by = ab - az$, & $bx + by = bb + az$: Tum æqualibus ad æqualia additis prodibit $ax + bx = ab + bb$, exterminatis utrisque y & z. Sed ejusmodi casus vel arguunt vitium aliquod in statu quæstionis latere, vel calculum erroneum esse aut non satis artificiosum. Modus autem quo una quantitas incognita per singulas æquationes tollatur ex sequentibus patebit.

Exter-

Exterminatio quantitatis incognitæ per æqualitatem valorum ejus.

CUM quantitas tollenda unius est tantum dimensionis in utraque æquatione, valor ejus uterque per regulas jam ante traditas quærendus est, & alter valor statuendus æqualis alteri.

Sic positis $a + x = b + y$ & $2x + y = 3b$, ut exterminetur y æquatio prima dabit $a + x - b = y$, & secunda dabit $3b - 2x = y$. Est ergo $a + x - b = 3b - 2x$, sive ordinando $x = \frac{4b - a}{3}$.

Atque ita $2x = y$, & $5 + x = y$ dant $2x = 5 + x$ seu $x = 5$.

Et $ax - 2by = ab$, & $xy = bb$ dant $\frac{ax - ab}{2b} (= y) = \frac{bb}{x}$; sive ordinando $xx - bx - \frac{2b^3}{a} = 0$.

Item $\frac{bbx - aby}{a} = ab + xy$, & $bx + \frac{ayy}{c} = 2aa$ tollendo x dant $\frac{aby + aab}{bb - ay} (= x) = \frac{2aac - ayy}{bc}$: Et reducendo $y^3 - \frac{bb}{a} yy - \frac{2aac - bbc}{a} y + bbc = 0$.

Denique $x + y - z = 0$ & $ay = xz$ tollendo z dant $x + y (= z) = \frac{ay}{x}$ sive $xx + xy = ay$.

Hoc idem quoque perficitur subducendo alterutrum valorem quantitatis incognitæ ab altero, & ponendo residuum æquale nihilo. Sic in exemplorum primo tolle $3b - 2x$ ab $a + x - b$ & manebit $a + 3x - 4b = 0$, sive $x = \frac{4b - a}{3}$.

Exterminatio quantitatis incognitæ ſubſtituendo pro ea valorem ſuum.

CUM in altera ſaltem æquatione, tollenda quantitas unius tantum dimenſionis exiſtit, valor ejus in ea quærendus eſt; & pro ſe in æquationem alteram ſubſtituendus. Sic propoſitis $xyy = b^3$ & $xx + yy = by - ax$; ut exterminetur x, prima dabit $\frac{b^3}{yy} = x$: Quare in ſecundam ſubſtituo $\frac{b^3}{yy}$ pro x, & prodit $\frac{b^6}{y^4} + yy = by - \frac{ab^3}{yy}$, ac reducendo $y^6 - by^5 + ab^3yy + b^6 = 0$.

Propoſitis autem $ayy + aay = z^3$; & $yz - ay = az$, ut y tollatur, ſecunda dabit $y = \frac{az}{z-a}$. Quare pro y ſubſtituo $\frac{az}{z-a}$ in primam, proditque $\frac{a^3zz}{zz - 2az + aa} + \frac{a^3z}{z-a} = z^3$. Et reducendo, $z^4 - 2az^3 + aazz - 2a^3z + a^4 = 0$.

Pari modo propoſitis $\frac{xy}{c} = z$ & $cy + zx = cc$, ad z tollendum pro eo ſubſtituo $\frac{xy}{c}$ in æquationem ſecundam, & prodit $cy + \frac{xxy}{c} = cc$.

Cæterum qui in hujuſmodi computationibus exercitatus fuerit ſæpe numero contractiores modos percipiet quibus incognita quantitas exterminari poſſit. Sic habitis $ax = \frac{bbx - b^3}{z}$ & $x = \frac{az}{x-b}$ ſi æqualia multiplicentur æqualibus, prodibunt æqualia

æqualia $axx = abb$ sive $x = b$. Sed casus ejusmodi particulares studiosis proprio marte cum res tulerit investigandos linquo.

Exterminatio quantitatis incognitæ quæ plurium in utraque æquatione dimensionum existit.

CUM in neutra æquatione tollenda quantitas unius tantum dimensionis existit valor maximæ potestatis ejus in utraque quærendus est; Deinde si potestates istæ non sint eædem, æquatio potestatis minoris multiplicanda est per tollendam quantitatem aut per ejus quadratum aut cubum, &c. ut ea evadat ejusdem potestatis cum æquatione altera. Tum valores illarum potestatum ponendæ sunt æquales, & æquatio nova prodibit ubi maxima potestas sive dimensio tollendæ quantitatis diminuitur. Et hanc operationem iterando quantitas illa tandem auferetur.

Quemadmodum sit $xx + 5x = 3yy$ & $2xy - 3xx = 4$; ut x tollatur, prima dabit $xx = -5x + 3yy$ & secunda $xx = \frac{2xy - 4}{3}$. Pono itaque $3yy - 5x = \frac{2xy - 4}{3}$, & sic x ad unicam tantum dimensionem reducitur, adeoque tolli potest per ea quæ paulo ante ostendi. Scilicet æquationem novissimam debite reducendo prodit $9yy - 15x = 2xy - 4$, sive $x = \frac{9yy + 4}{2y + 15}$. Hunc itaq; valorem pro x in aliquam ex æquationibus primo propositis (velut in $xx + 5x = 3yy$) substituo, & oritur $\frac{81y^4 + 72yy + 16}{4yy + 60y + 225} + \frac{45yy + 20}{2y + 15} = 3yy$.

Quam, ut in ordinem redigatur, multiplico per $4yy + 60y + 225$, & prodit $81y^4 + 72yy + 16 + 90y^3 + 40y + 675yy + 300 = 12y^4 + 180y^3 + 675yy$, five $69y^4 - 90y^3 + 72yy + 40y + 316 = 0$.

Præterea fi fit $y^3 = xyy + 3x$, & $yy = xx - xy - 3$; ut y tollatur multiplico pofteriorem æquationem per y & fit $y^3 = xxy - xyy - 3y$ totidem dimenfionum quot prior. Jam ponendo valores ipfius y^3 fibimet æquales habeo $xyy + 3x = xxy - xyy - 3y$, ubi y deprimitur ad duas dimenfiones. Per hanc itaque & fimpliciorem ex æquationibus primo propofitis $yy = xx - xy - 3$ quantitas y prorfus tolli poteft infiftendo veftigiis prioris exempli.

Sunt & alii modi quibus hæc eadem abfolvi poffunt; idque fæpenumero contractius. Quemadmodum ex $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$ & $yy = 2xy + \frac{x^4}{aa}$; ut y deleatur, extrahe in utraque radicem y ficut in Reg. 7. oftenfum eft, & prodibunt $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & $y = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. Jam hos ipfius y valores ponendo æquales habebitur $\frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx} = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & rejiciendo æqualia $\sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, reftabit $\frac{xx}{a} = x$, vel $xx = ax$ & $x = a$.

Porro ut ex æquationibus $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$ tollatur x, aufer y de partibus

bus æquationis primæ, & reſtat $x + \frac{yy}{x} = 20 - y$, & partibus quadratis fit $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y + yy$ tollendoque utrinque yy reſtat $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y$. Quare cum $400 - 40y$ & 140 iiſdem quantitatibus æquentur, erit $400 - 40y = 140$, ſive $y = 6\frac{1}{2}$. Et ſic opus in plerisque aliis æquationibus contrahere liceat.

Cæterum cum quantitas exterminanda multarum dimenſionum exiſtit, ad eam ex æquationibus tollendam calculus maxime laborioſus nonnunquam requiritur: Sed labor tunc plurimum minuetur per exempla ſequentia tanquam regulas adhibita.

REG. I.

Ex $axx + bx + c = 0$, & $fxx + gx + h = 0$;
Exterminato x prodit.

$$\overline{ah - bg - 2cf} \times ah : + \overline{bh - cg} \times bf : + \overline{agg + cff} \times c = 0.$$

REG. II.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fxx + gx + h = 0$;
Exterminato x prodit

$$\overline{ah - bg - 2cf} \times ahh : + \overline{bh - cg - 2df} \times bfh : + \overline{ch - dg} \times \overline{agg + cff} : + \overline{3agh + bgg + dff} \times df = 0.$$

REG. III.

Ex $ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, & $fxx + gx + h = 0$;
Exterminato x prodit

$$\overline{ah - bg - 2cf} \times ah^3 : + \overline{bh - cg - 2df} \times bfhh : + \overline{agg + cff} \times \overline{chh - dgh + egg - 2efh} + \overline{3agh + bgg + dff} \times dfh : + \overline{2ahh + 3bgh - dfg + eff} \times eff : - \overline{bg - 2ah} \times efgg = 0.$$

REG.

Reg. IV.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fx^3 + gxx + hx + k = 0$;

Exterminato x prodit

$$\overline{ah - bg - 2cf} \times \overline{adhh - achk} : + \overline{ak + bh - cg - 2df}$$
$$\times bdfh : - \overline{ak + bh + 2cg + 3df} \times aakk : + \overline{cdh - ddg}$$
$$\overline{- cck + 2bdk} \times \overline{agg + cff} : + \overline{3agh + bgg + dff - 3afk}$$
$$\times ddf : - \overline{3ak - bh + cg + df} \times bcfk : + \overline{bk - 2dg} \times bbfk$$
$$- \overline{bbk - 3adh - cdf} \times agk = 0.$$

Verbi gratia, ut ex æquationibus $xx + 5x - 3yy = 0$, & $3xx - 2xy + 4 = 0$ exterminetur x: in regulam primam pro a, b, c; f, g, & h reſpective ſubſtituo 1, 5, $-3yy$; 3, $-2y$, & 4. Et ſignis + & − probe obſervatis oritur $\overline{4 + 10y + 18yy} \times 4 : + \overline{20 - 6y^3} \times 15 : + \overline{4yy - 27yy} \times -3yy = 0$. Sive $16 + 40y + 72yy + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$.

Simili ratione ut y deleatur ex æquationibus $y^3 - xyy - 3x = 0$ & $yy + xy - xx + 3 = 0$, in regulam ſecundam pro a, b, c, d; f, g, h, & x ſubſtituo, 1, $-x$, 0, $-3x$; 1, x, $-xx + 3$, & y, reſpective, proditque $\overline{3 - xx + xx} \times \overline{9 - 6xx + x^4} : \overline{- 3x + x^3 + 6x} \times \overline{- 3x + x^3} : + 3xx \times xx : + \overline{9x - 3x^3 - x^3 - 3x} \times - 3x = 0$. Tum delendo ſuperflua & multiplicando, fit $27 - 18xx + 3x^4$, $- 9xx + x^6$, $+ 3x^4 - 18x^2 + 12x^4 = 0$. Et ordinando $x^6 + 18x^4 - 45xx + 27 = 0$.

Hactenus de unica incognita quantitate è duabus æquationibus tollenda. Quod ſi plures è pluribus tollendæ ſunt, opus per gradus peragetur: Ex æquationibus $ax = yz$, $x + y = z$ & $5x = y + 3z$,

ſi

si quantitas y elicienda sit, imprimis tolle alteram quantitatum x aut z, puta x substituendo pro eâ valorem ejus $\frac{yz}{a}$ (per æquationem primam inventum) in æquationem secundam ac tertiam. Quo pacto obtinebuntur $\frac{yz}{a} + y = z$, & $\frac{5yz}{a} = y + 3z$: E quibus deinde tolle z ut supra.

De modo tollendi quantitates quotcunque surdas ex æquationibus.

HUC referre licet quantitatum surdarum exterminationem fingendo eas literis quibuslibet æquales. Quemadmodum si sit $\sqrt{ay} - \sqrt{aa - ay} = 2a + \sqrt{3: ayy}$, scribendo t, pro $\sqrt{ay}$, v pro $\sqrt{aa - ay}$, & x pro $\sqrt{3: ayy}$ habebuntur æquationes $t - v = 2a + x$, $tt = ay$, $vv = aa - ay$, & $x^3 = ayy$, ex quibus tollendo gradatim t, v, & x resultabit tandem æquatio libera ab omni Asymmetria.

Quomodo Quæstio aliqua ad æquationem redigatur.

POstquam Tyro in æquationibus pro arbitrio transformandis & concinnandis aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit ut ingenii vires in quæstionibus ad æquationem redigendis tentet. Proposita autem aliqua Quæstione, Artificis ingenium in eo præsertim requiritur ut omnes ejus conditiones totidem æquationibus designet. Ad quod faciendum perpendet imprimis an propositiones sive senten-

sententiæ quibus enunciatur sint omnes aptæ quæ terminis algebraicis designari possint, haud secus quam conceptus nostri characteribus græcis vel latinis. Et si ita, (ut solet in quæstionibus quæ circa numeros vel abstractas quantitates versantur,) tunc nomina quantitatibus ignotis, atque etiam notis, si opus fuerit, imponat; & sensum quæstionis sermone, ut ita loquar, analytico designet. Et conditiones ejus ad algebraicos terminos sic translatæ tot dabunt æquationes, quot ei solvendæ sufficiunt.

Quemadmodum si quærantur tres numeri continue proportionales quorum summa sit 20, & quadratorum summa 140; positis x, y & z nominibus numerorum trium quæsitorum, Quæstio è latinis literis in algebraicas vertetur ut sequitur.

Quæstio Latine enunciata.	Eadem algebraice.
Quæruntur tres numeri his conditionibus,	$x. y. z?$
Ut sint continue proportionales,	$x.y::y.z.$ sive $xz = yy$
Ut omnium summa sit 20.	$x + y + z = 20.$
Et ut quadratorum summa sit 140.	$xx + yy + zz = 140.$

Atque ita quæstio deducitur ad æquationes $xz = yy$, $x + y + z = 20$ & $xx + yy + zz = 140$, quarum ope x, y & z per regulas supra traditas investigandi sunt.

Cæterum notandum est solutiones quæstionum eo magis expeditas & artificiosas ut plurimum evadere quo pauciores incognitæ quantitates sub initio ponuntur. Sic in hac quæstione posito x pro primo

primo numero & y pro secundo, erit $\frac{yy}{x}$ tertius continue proportionalis; quem proinde ponens pro tertio numero quæstionem ad æquationes sic reduco.

Quæstio Latine enunciata.	Eadem Algebraice.
Quæruntur tres numeri continue proportionales,	$x.\ y.\ \frac{yy}{x}$?
Quorum summa sit 20,	$x + y + \frac{yy}{x} = 20.$
Et quadratorum summa 140.	$xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140.$

Habentur itaque æquationes $x + y + \frac{yy}{x} = 20$ & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$ quarum reductione x & y determinandi sunt.

Aliud exemplum accipe. Mercator quidam nummos ejus triente quotanis adauget, demptis 100 lb quas annuatim impendit in familiam & post tres annos fit duplo ditior. Quæruntur nummi.

Ad hoc autem resolvendum sciendum est quod plures latent propositiones quæ omnes sic eruuntur & enunciantur.

Latine.	Algebraice.
Mercator habet nummos quosdam	$x.$
Ex quibus anno primo expendit 100 ℔.	$x - 100.$
Et reliquum adauget triente.	$x - 100 + \frac{x - 100}{3}$ sive $\frac{4x - 400}{3}.$
Annoque secundo expendit 100 ℔.	$\frac{4x - 400}{3} - 100$ sive $\frac{4x - 700}{3}.$
Et reliquum adauget triente.	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$ sive $\frac{16x - 2800}{9}.$
Et sic anno tertio expendit 100 ℔.	$\frac{16x - 2800}{9} - 100$ sive $\frac{16x - 3700}{9}.$
Et reliquo trientem similiter lucratus est.	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27},$ sive $\frac{64x - 14800}{27}.$
Fitque duplo ditior quam sub initio.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x.$

Quæstio itaque ad æquationem $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$ redigitur; cujus reductione eruendus est x. Nempe duc eam in 27 & fit $64x - 14800 = 54x$ subduc $54x$ & restat $10x - 14800 = 0$, seu $10x = 14800$, & dividendo per 10 fit $x = 1480$. Quare 1480 ℔ sunt nummi sub initio ut & lucrum.

Vides itaque quod ad solutiones quæstionum quæ circa numeros vel abstractas quantitatum relationes solummodo versantur, nihil aliud fere requiritur quam ut è sermone Latino vel alio quovis in quo Problema proponitur, translatio fiat in sermonem (si ita loquar) Algebraicum, hoc est in Characteres qui apti sunt ut nostros de quantitatum relationibus conceptus designent. Nonnunquam vero potest accidere quod sermo quocum

status

ſtatus quæſtionis exprimitur ineptus videatur qui in Algebraicum poſſit verti; ſed paucis mutationibus adhibitis, & ad ſenſum potius quam verborum ſonos attendendo verſio reddetur facilis. Sic enim quælibet apud Gentes loquendi formæ propria habent Idiomata: Quæ ubi obvenerint, tranſlatio ex unis in alias non verbo tenus inſtituenda eſt ſed ex ſenſu determinanda. Cæterum ut hujuſmodi problemata hac methodo ad æquationes redigendi familiaritatem convincam & illuſtrem, & cum Artes exemplis facilius quam præceptis addiſcantur, placuit ſequentium problematum ſolutiones adjungere:

PROB. I.

Data duorum numerorum ſumma a & differentia quadratorum b, invenire numeros?

Sit eorum minor x & erit alter $a - x$ eorumque quadrata xx & $aa - 2ax + xx$: Quorum differentia $aa - 2ax$ ſupponitur b. Eſt itaque $aa - 2ax = b$, indeque per reductionem $aa - b = 2ax$ ſeu $\frac{aa - b}{2a} \left(= \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a}\right) = x$.

Exempli Gr. Si ſumma numerorum ſeu a ſit 8, & quadratorum differentia ſeu b 16; erit $\frac{1}{2}a - \frac{b}{2a} (= 4 - 1) = 3 = x$ & $a - x = 5$. Quare numeri ſunt 3 & 5.

PROB. II.

Invenire tres quantitates x, y & z quarum paris cujuſque ſumma datur.

Si

Si summa paris x & y sit a; paris x & z, b; ac paris y & z, c: Pro determinandis tribus quæsitis x, y & z tres habebuntur æquationes $x + y = a$, $x + z = b$, & $y + z = c$. Jam ut incognitarum duæ puta y & z exterminentur, aufer x utrinque in prima & secunda æquatione, & emergent $y = a - x$, & $z = b - x$, quos valores pro y & z substitue in tertia, & orietur $a - x + b - x = c$ & per reductionem $x = \frac{a + b - c}{2}$. Invento x æquationes superiores $y = a - x$ & $z = b - x$ dabunt y & z.

Exemp. Si summa paris x & y sit 9, paris x & z 10, & paris y & z 13; tum in valoribus x, y & z scribe 9 pro a, 10 pro b, & 13 pro c; & evadet $a + b - c = 6$, adeoq; $x\ (= \frac{a + b - c}{2}) = 3$, $y\ (= a - x) = 6$, & $z\ (= b - x) = 7$.

PROB. III.

Quantitatem datam ita in partes quotcunque dividere ut majores partes superent minimam per datas differentias.

Sit a quantitas in quatuor ejusmodi partes dividenda, ejusque prima atque minima pars x, & super hanc excessus secundæ partis b, tertiæ partis c & quartæ partis d; & erit $x + b$ secunda pars, $x + c$ tertia pars & $x + d$ quarta pars, quarum omnium aggregatum $4x + b + c + d$ æquatur toti lineæ a. Aufer jam utrinque $b + c + d$ & restat $4x = a - b - c - d$ sive $x = \frac{a - b - c - d}{4}$.

Exempl. Proponatur linea 20 pedum sic in 4 partes distribuenda ut super primam partem excessus

ſus ſecundæ ſit 2 pedum tertiæ 3 ped. & quartæ 7 ped. Et quatuor partes erunt $x\ (= \frac{a-b-c-d}{4}$ ſive $\frac{20-2-3-7}{4}) = 2$, $x+b=4$, $x+c=5$, & $x+d=9$.

Eodem modo quantitas in plures partes iiſdem conditionibus dividitur.

PROB. IV.

Viro cuidam nummos inter mendicantes diſtribuere volenti, deſunt octo denarii quo minus det ſingulis tres denarios. Dat itaque ſingulis duos denarios & tres denarii ſuperſunt. Quæritur numerus mendicantium.

Eſto numerus mendicantium x & deerunt 8 denarii quo minus det omnibus $3x$ denarios; habet itaque $3x-8$ denarios. Ex his autem dat $2x$ denarios, & reliqui denarii $x-8$ ſunt tres. Hoc eſt $x-8=3$ ſeu $x=11$.

PROB. V.

Si Tabellarii duo A & B 59 milliaribus diſtantes tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 mill. in 3 horis, ac B una hora ſerius iter inſtituit quam A: Quæritur longitudo itineris quod A conficiet antequam conveniet B.

Dic longitudinem illam x; & erit $59-x$ longitudo itineris B: Et cum A pertranſeat 7 mill. in 2 hor. pertranſibit ſpatium x in $\frac{2x}{7}$ horis, eo quod ſit 7 mill. 2 hor. :: x mill. $\frac{2x}{7}$ hor. Atque ita cum B pertranſeat 8 mill. in 3 hor. pertranſibit

 bit

bit spatium suum $59 - x$ in $\frac{177 - 3x}{8}$ horis. Jam cum horum temporum differentia sit 1 hor; ut evadant æqualia adde differentiam illam breviori tempori nempe tempori $\frac{177 - 3x}{8}$, & emerget $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$. Et per reductionem $35 = x$. Nam multiplicando per 8 fit $185 - 3x = \frac{16x}{7}$. Dein multiplicando etiam per 7 fit $1295 - 21x = 16x$, seu $1295 = 37x$. Et dividendo denique per 37, exoritur $35 = x$. Sunt itaque 35 mill. iter quod A conficiet antequam conveniet B.

Idem generalius.

Datis duorum mobilium A & B eodem cursu pergentium celeritatibus, una cum intervallo locorum ac temporum à quibus incipiunt moveri: Determinare metam in qua convenient.

Pone mobilis A eam esse celeritatem qua spatium c pertransire possit in tempore f, & mobilis B eam esse qua spatium d pertransire possit in tempore g; & locorum intervallum esse e, ac h temporum in quibus moveri incipiunt.

CASUS I.

Deinde si ambo ad easdem plagas tendant, & A sit mobile quod sub initio motus longius distat a meta: Pone distantiam illam esse x, indeque aufer intervallum e, & restabit $x - e$ pro distantia B a meta. Et cum A pertranseat spatium c in tempore f, tempus in quo pertransibit spatium x erit

erit $\frac{fx}{c}$, eo quod ſit ſpatium c ad tempus f, ut ſpatium x ad tempus $\frac{fx}{c}$. Atque ita cum B pertranſeat ſpatium d in g, tempus in quo pertranſibit ſpatium $x - e$ erit $\frac{gx - ge}{d}$. Jam cum horum temporum differentia ſupponatur h, ut ea evadant æqualia adde h breviori tempori, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ ſi modo B prius incipiat moveri, & evadet $\frac{fx}{c} + h = \frac{gx - ge}{d}$. Et per reductionem $\frac{cge + cdh}{cg - df}$ vel $\frac{ge + dh}{g - \frac{d}{c}f} = x$. Sin A prius moveri incipiat adde h tempori $\frac{gx - ge}{d}$ & evadet $\frac{fx}{c} = h + \frac{gx - ge}{d}$, & per reductionem $\frac{cge - cdh}{cg - df} = x$.

CASUS II.

Quod ſi mobilia obviam eant, & x ut ante ponatur initialis diſtantia mobilis A a meta, tum $e - x$ erit initialis diſtantia ipſius B ab eadem meta; & $\frac{fx}{c}$ tempus in quo A conficiet diſtantiam x, atque $\frac{ge - gx}{d}$ tempus in quo B conficiet diſtantiam ſuam $e - x$. Quorum temporum minori, ut ſupra, adde differentiam h, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ ſi B

 prius

prius incipiat moveri, & sic habebitur $\frac{fx}{c}+h=\frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge-cdh}{cg+df}=x$. Sin A prius incipiat moveri, adde h tempori $\frac{ge-gx}{d}$, & evadet $\frac{fx}{c}=h+\frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge+cdh}{cg+df}=x$.

Exempl. I. Si quotidie Sol unum gradum conficit & Luna tredecim, & ad tempus aliquod, Sol sit in principio Cancri atque post tres dies Luna in principio Arietis: Quæritur locus conjunctionis proxime futuræ. Resp. in $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri. Nam cum ambo ad easdem plagas eant, & serior sit Epocha motus lunæ quæ longius distat a meta: Erit A Luna, B Sol, & $\frac{cge+cdh}{cg-df}$ longitudo itineris lunaris, quæ, si scribatur 13 pro c; 1 pro f, d, ac g; 90 pro e; & 3 pro h; evadet $\frac{13\times1\times90+13\times1\times3}{13\times1-1\times1}$; hoc est $\frac{1209}{12}$, sive $100\frac{3}{4}$. Hos itaque gradus adjice pincipio Arietis & prodibit $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri.

Exempl. II. Si Tabellarii duo A & B 59 milliaribus distantes tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 milliaria in 3 horis, & B una hora serius iter instituit quam A: Quæritur iter quod A conficiet antequam conveniat B. Resp. 35 mill. Nam cum obviam eant & A primo instituat iter, erit $\frac{cge+cdh}{cg+df}$ iter quæ-

situm,

ſitum. Et hoc, ſcribatur 7 pro c, 2 pro f, 8 pro d, 3 pro g, 59 pro e, & 1 pro h, evadet $\frac{7 \times 3 \times 59 + 7 \times 8 \times 1}{7 \times 3 + 8 \times 2}$; hoc eſt $\frac{1295}{37}$ ſive 35.

PROB. VI.

Data agentis alicujus poteſtate, invenire quot ejuſmodi agentes datum effectum a in dato tempore b producent.

Sit ea agentis poteſtas qua effectum c producere poteſt in tempore d, & erit ut tempus d ad tempus b, ita effectus c quem agens iſte producere poteſt in tempore d, ad effectum quem poteſt producere in tempore b, qui proinde erit $\frac{bc}{d}$. Deinde ut unius agentis effectus $\frac{bc}{d}$ ad omnium effectum a, ita agens iſte unicus ad omnes agentes: Adeoque agentium numerus erit $\frac{ad}{bc}$.

Exempl. Si ſcriba in 8 diebus 15 folia deſcribere poteſt, quot ejuſmodi ſcribæ requiruntur ad deſcribendum 405 folia in 9 diebus? Reſp. 24. Nam ſi ſubſtituantur 8 pro d, 15 pro c, 405 pro a & 9 pro b, numerus $\frac{ad}{bc}$ evadet $\frac{405 \times 8}{9 \times 15}$ hoc eſt $\frac{3240}{135}$, ſive 24.

PROB. VII.

Datis plurium agentium viribus, tempus x determinare in quo datum effectum d conjunctim producent.

Agentium A, B, C, vires ponantur quæ in temporibus e, f, g producant effectus a, b, c reſpective; & hæ in tempore x producent effectus

 ax

$\frac{ax}{e}, \frac{bx}{f}, \frac{cx}{g}$. Quare est $\frac{ax}{e} + \frac{bx}{f} + \frac{cx}{g} = d$, & per reductionem $x = \frac{d}{\frac{a}{e} + \frac{b}{f} + \frac{c}{g}}$.

Exempl. Tres mercenarii opus aliquod certis temporibus perficere possunt, *viz.* A semel in tribus septimanis, B ter in octo septimanis, & C quinquies in duodecim septimanis. Quæritur quanto tempore simul absolvent? Sunt itaque Agentium A, B, C vires quæ temporibus 3, 8, 12 producant effectus 1, 3, 5 respective: Et quæritur tempus quo absolvent effectum 1. Quare pro $a, b, c; d; e, f, g$ scribe 1, 3, 5, 1, 3, 8, 12, & proveniet $x = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{3}{8} + \frac{5}{12}}$ sive $\frac{8}{9}$ sept. hoc est 6 dies $5\frac{1}{3}$ horæ, tempus quo simul absolvent.

PROB. VIII.

Dissimiles duarum pluriumve rerum misturas ita componere ut res illæ commistæ datam inter se rationem acquirant.

Sit unius misturæ data quantitas $dA + eB + fC$, alterius eadem quantitas $gA + hB + kC$, & eadem tertiæ $lA + mB + nC$ ubi A, B, & C denotent res mistas, & d, e, f, g, h, &c. Proportiones earundem in misturis. Et sit $pA + qB + rC$ mistura quam ex his tribus oportet componere; fingeque x, y & z numeros esse per quos si tres datæ misturæ respective multiplicentur, earum summa evadet $pA + qB + rC$.

Est itaque $\left.\begin{matrix} dxA + exB + fxC \\ + gyA + hyB + kyC \\ + lzA + mzB + nzC \end{matrix}\right\} = pA + qB + rC,$

Adeo-

Adeoque collatis terminis $dx+gy+lz=p$, $ex+hy+mz=q$, & $fx+ky+nz=r$, & per reductionem $x=\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{q-hy-mz}{e}$ $=\frac{r-ky-nz}{f}$. Et rursus æquationes $\frac{p-gy-lz}{d}$ $=\frac{q-hy-mz}{e}$ & $\frac{q-hy-mz}{e}=\frac{r-ky-nz}{f}$ per reductionem dant $\frac{ep-dq+dmz-elz}{eg-dh}$ $(=y)=\frac{fq-er+enz-fmz}{fh-ek}$: Quæ, si abbrevietur scribendo α pro $ep-dq$, β pro $dm-el$, γ pro $eg-eh$ δ pro $fq-er$, ζ pro $en-fm$, & θ pro $fh-ek$, evadet $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=\frac{\delta+\zeta z}{\theta}$, & per reductionem $\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=z$. Invento z pone $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=y$ & $\frac{p-gy-lz}{d}=x$.

EXEMPL. Si tres sint metallorum colliquefactorum misturæ, quarum primæ pondo continet argenti ℥ 12, æris ℥ 1, & stanni ℥ 3, secundæ pondo continet argenti ℥ 1, æris ℥ 12, & stanni ℥ 3, & tertiæ pondo continet æris ℥ 14, stanni ℥ 2, & argenti nihil; sintque hæ misturæ ita componendæ ut pondo compositionis contineat argenti ℥ 4 æris ℥ 9 & stanni ℥ 3: Pro d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r scribe 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3 respective, & erit $\alpha\ (=ep-dq=1\times4-12\times9)=-104$, & $\beta\ (=dm-el=12\times14-1\times0)=168$, & sic $\gamma=-143$, $\delta=24$, $\zeta=-40$, & $\theta=33$. Adeoque $z\ (=\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=\frac{-3432+3432}{5720-5544})=0$,

 $y\ (=$

$y(=\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=\frac{-104+0}{-143})=\frac{8}{11}$, & $x(=\frac{p-gy-lz}{d}$ $=\frac{4-\frac{8}{11}}{12})=\frac{3}{11}$. Quare si misceantur $\frac{8}{11}$ partes pondo misturæ secundæ, $\frac{3}{11}$ partes pondo primæ & nihil tertiæ aggregatum erit pondo continens quatuor uncias argenti, novem æris, & tres stanni.

PROB. IX.

Datis plurium ex iisdem rebus misturarum pretiis, & proportionibus mistorum inter se, pretium cujusvis è mistis determinare.

Cujusvis rerum A, B, C, misturæ $dA+gB+lC$ pretium esto p, misturæ $eA+hB+mC$ pretium q, & misturæ $fA+kB+nC$ pretium r; & rerum illarum A, B, C quærantur pretia x, y & z. Utpote pro rebus A, B, & C substitue earum pretia x, y & z, & exurgent æquationes $dx+gy+lz=p$, $ex+hy+mz=q$, & $fx+ky+nz=r$, ex quibus pergendo ut in præcedente Problemate, elicientur itidem $\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=z$, $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=y$, & $\frac{p-gy-lz}{d}=x$.

Exempl. Emit quidam 40 modios tritici, 24 modios hordei, & 20 modios avenæ simul 15 libris 12 solidis; Deinde consimilis grani emit 26 modios tritici, 30 modios hordei, & 50 modios avenæ simul 16 libris: Ac tertio consimilis etiam grani emit 24 modios tritici, 120 modios hordei & 100 modios avenæ simul 34 lib. Quæritur quanti æstimandus sit modius cujusque grani? Resp. Modius tritici 5 solidis, hordei 3 solidis & avenæ 2 solidis. Nam pro d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, & r scribendo respective 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120,

120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, & 34; prodit α $(= ep - dq = 26 \times 15\frac{3}{5} - 40 \times 16) = -234\frac{2}{5}$; & β $(= dm - el = 40 \times 50 - 26 \times 20) = 1480$. Atque ita $\gamma = -576$, $\delta = -500$, $\zeta = 1400$, & $\theta = -2400$. Adeoq; $z \left(= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{562560 - 288000}{-806400 + 3552000} = \frac{274560}{2745600}\right) = \frac{1}{10}$, $y \left(= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-234\frac{2}{5} + 148}{-576}\right) = \frac{3}{20}$. Et $x \left(= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{15\frac{3}{5} - \frac{18}{5} - 2}{40}\right) = \frac{1}{4}$. Conſtitit itaque modius tritici $\frac{1}{4}$ ℔ ſeu 5 ſolidis, modius hordei $\frac{3}{20}$ ℔ ſeu 3 ſolidis, & modius avenæ $\frac{1}{10}$ ℔ ſeu 2 ſolidis.

PROB. X.

Datis & miſturæ & miſtorum gravitatibus ſpecificis invenire proportionem miſtorum inter ſe.

Sit e gravitas ſpecifica miſturæ $A + B$ cujus A gravitas ſpecifica eſt a, & B gravitas b: & cum gravitas abſoluta ſeu pondus componatur ex mole corporis & gravitate ſpecifica, erit aA pondus ipſius A, bB pondus ipſius B & $eA + eB$ pondus aggregati $A + B$, adeoque $aA + bB = eA + eB$, indeque $aA - eA = eB - bB$ ſeu $e - b.\ a - e :: A.\ B.$

EXEMPL. Sit auri gravitas ut 19, argenti ut $10\frac{1}{3}$, & Coronæ Hieronis ut 17; eritque 10. 3 $(:: e - b.\ a - e :: A.\ B)$ :: moles in auri corona, ad molem argenti, vel 190. 31 $(:: 19 \times 10.\ 10\frac{1}{3} \times 3 :: a \times \overline{e - b}.\ b \times \overline{a - e})$ :: pondus auri in corona, ad pondus argenti, & 221. 31 :: pondus coronæ, ad pondus argenti.

PROB. XI.

Si boves a depascant pratum b in tempore c; & boves d depascant pratum æque bonum e in tempore f, & gramen uniformiter crescat: Quæritur quot boves depascent pratum simile g in tempore h.

Si boves a in tempore c depascant pratum b; tum per analogiam boves $\frac{e}{b}a$ in eodem tempore c, vel boves $\frac{ec}{bf}a$ in tempore f, vel boves $\frac{ec}{bh}a$ in tempore h, depascent pratum e: puta si gramen post tempus c non cresceret. Sed cùm propter graminis incrementum boves d in tempore f, depascant solummodo pratum e, ideo graminis in prato e incrementum illud per tempus $f-c$ tantum erit quantum per se sufficit pascendis bobus $d-\frac{eca}{bf}$ per tempus f, hoc est quantum sufficit pascendis bobus $\frac{df}{h}-\frac{eca}{bh}$ per tempus h. Et in tempore $h-c$ per analogiam tantum erit incrementum quantum per se sufficit pascendis bobus $\frac{h-c}{f-c}$ in $\frac{df}{h}-\frac{eca}{bh}$ sive $\frac{bdfh-ecah-bdcf+aecc}{bfh-bch}$. Hoc incrementum adjice bobus $\frac{aec}{bh}$ & prodibit $\frac{bdfh-ecah-bdcf+ecfa}{bfh-bch}$ numerus boum quibus pascendis sufficit pratum e per tempus h. Adeoque per analogiam pratum g bobus $bdfgh$

$\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$ per idem tempus h pascendis sufficiet.

EXEMPL. Si 12 boves depascant $3\frac{1}{3}$ jugera prati in 4 septimanis; & 21 boves depascant 10 jugera consimilis prati in 9 septimanis; quæritur quot boves depascant 24 jugera in 18 septimanis? Resp. 36. Iste enim numerus invenietur substituendo in $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$ numeros 12, $3\frac{1}{3}$, 4, 21, 10, 9, 24, & 18 pro literis a, b, c, d, e, f, g & h respective. Sed solutio forte haud minus expedita erit si è primis principiis ad formam solutionis præcedentis literalis eruatur. Utpote si 12 boves in 4 septimanis depascant $3\frac{1}{3}$ jugera, tum per analogiam 36 boves in 4 septimanis vel 16 boves in 9 septimanis vel 8 boves in 18 septimanis depascent 10 jugera: Puta si gramen non cresceret. Sed cum propter graminis incrementum 21 boves in 9 septimanis depascant solummodo 10 jugera, illud graminis in 10 jugeris per posteriores 5 septimanas incrementum tantum erit quantum per se sufficit excessui boum 21 supra 16, hoc est 5 bobus per 9 septimanas, vel quod perinde est $\frac{5}{2}$ bobus per 18 septimanas pascendis. Et in 14 septimanis (excessu 18 supra 4 primas) incrementum illud graminis per analogiam tantum erit quantum sufficiat 7 bobus per 18 septimanas pascendis; est enim 5 sept. 14 sept. $\frac{5}{2}$ boves 7 boves. Quare 8 bobus quos 10 jugera sine incremento graminis pascere possunt per 18 septimanas adde hosce 7 boves quibus pascendis solum incrementum graminis sufficit, & summa erit 15 boves. Ac denique si 10 jugera 15 bobus per 18 septimanas pascendis sufficiant, tum per analogiam 24 jugera per idem tempus sufficient 36 bobus.

PROB.

PROB. XII.

Datis sphæricorum corporum in eadem recta motorum, sibique occurrentium magnitudinibus & motibus, determinare motus eorundem post reflexionem.

Hujus resolutio ex his dependet conditionibus, ut corpus utrumque tantum reactione patiatur quantum agit in alterum, & ut eadem celeritate post reflexionem recedant ab invicem qua ante accedebant. His positis sint corporum A & B celeritates a & b respective; & motus (siquidem componantur ex mole & celeritate corporum) erunt aA & bB. Et si corpora ad easdem plagas tendant, & A celerius movens insequatur B, pone x decrementum motus aA, & incrementum motus bB percussione exortum; & post reflexionem motus erunt $a\text{A}-x$ & $b\text{B}+x$; & celeritates $\frac{a\text{A}-x}{\text{A}}$ ac $\frac{b\text{B}+x}{\text{B}}$ quarum differentia æquatur $a-b$ differentiæ celeritatum ante reflexionem. Habetur itaque æquatio $\frac{b\text{B}+x}{\text{B}}-\frac{a\text{A}-x}{\text{A}}=a-b$, & inde per reductionem fit $x=\frac{2a\text{AB}-2b\text{AB}}{\text{A}+\text{B}}$, quo pro x in celeritatibus $\frac{a\text{A}-x}{\text{A}}$ & $\frac{b\text{B}+x}{\text{B}}$ substituto prodeunt $\frac{a\text{A}-a\text{B}+2b\text{B}}{\text{A}+\text{B}}$ celeritas ipsius A, & $\frac{2a\text{A}-b\text{A}+b\text{B}}{\text{A}+\text{B}}$ celeritas ipsius B post reflexionem.

Quod

Quod ſi corpora obviam eant, tum ſigno ipſius b ubique mutato, celeritates poſt reflexionem erunt $\frac{aA - aB - 2bB}{A + B}$ & $\frac{2aA + bA - bB}{A + B}$: Quarum alterutra ſi forte negativa obvenerit, id arguit motum illum poſt reflexionem ad plagam dirigi ei contrariam ad quam A tendebat ante reflexionem. Id quod etiam de motu ipſius A in caſu priori intelligendum eſt.

EXEMPL. Si corpora homogenea A trium librarum cum celeritatis gradibus 8, & B novem librarum cum celeritatis gradibus 2 ad eaſdem plagas tendant: tunc pro A, a, B & b ſcribe 3, 8, 9 & 2; & $(\frac{aA - aB + 2bB}{A + B})$ evadit -1, ac $(\frac{2aA - bA + bB}{A + B})$ 5. Recedet itaque A cum uno gradu celeritatis poſt reflexionem, & B cum quinque gradibus progredietur.

PROB. XIII.

Invenire tres numeros continue proportionales quorum ſumma ſit 20, & quadratorum ſumma 140.

Pone numerorum primum x, & ſecundum y; eritque tertius $\frac{yy}{x}$, adeoque $x + y + \frac{yy}{x} = 20$; & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$. Et per reductionem $xx \begin{smallmatrix} + y \\ - 20 \end{smallmatrix} x + yy = 0$, & $x^4 \begin{smallmatrix} + yy \\ - 140 \end{smallmatrix} xx + y^4 = 0$. Jam ut exterminetur x, pro a, b, c, d, e, f, g & h in Reg. 3. ſubſtitue reſpective 1, 0, $yy - 140$, 0, y^4; 1, $y - 20$, & yy; Et emerget $\overline{-yy + 280} \times y^6$: $\overline{+2yy - 40y + 260} \times \overline{260y^4 - 40y^5}$: $+3y^4 \times y^4$:

$y^4 : - 2yy \times \overline{y^6 - 40y^5 + 400y^4} : = 0$. Et per multiplicationem $1600y^6 - 20800y^5 - 67600y^4 = 0$. Ac reducendo $4yy - 52y + 169 = 0$. Sive (radice extracta) $2y - 13 = 0$ seu $y = 6\frac{1}{2}$, Id quod etiam brevius alia methodo sed minus obvia supra inventum est. Porro ut inveniatur x substitue $6\frac{1}{2}$ pro y in æquatione $xx \begin{smallmatrix} + y \\ - 20 \end{smallmatrix} x + yy = 0$. Et exurget $xx - 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{4} = 0$, seu $xx = 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{4}$. Et extracta radice $x = 6\frac{3}{4} +$ vel $- \sqrt{3\frac{5}{16}}$. Nempe $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$ est maximus quæsitorum trium numerorum, & $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$ minimus. Nam x alterutrum extremorum numerorum ambigue designat, indeque gemini prodeunt valores, quorum alteruter potest esse x, existente altero $\frac{yy}{x}$.

Idem aliter. Positis numeris x, y & $\frac{yy}{x}$ ut ante, erit $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, seu $xx = \begin{smallmatrix} 20 \\ - y \end{smallmatrix} x - yy$ & extracta radice $x = 10 - \frac{1}{2}y + \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}yy}$ primus numerus: Hunc & y aufer de 20 & restat $\frac{yy}{x} = 10 - \frac{1}{2}y - \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}yy}$ tertius numerus. Estque summa quadratorum à tribus hisce numeris $400 - 40y$, adeoque $400 - 40y = 140$, sive $y = 6\frac{1}{2}$. Invento medio numero $6\frac{1}{2}$, substitue eum pro y in primo ac tertio numero supra invento; & evadet primus $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$ ac tertius $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$ ut ante.

PROB. XIV.

Invenire quatuor numeros continue proportionales quorum duo medii simul constituant 12, *&* *duo extremi* 20.

Sit

Sit x secundus numerus; & erit $12 - x$ tertius; $\frac{xx}{12-x}$ primus; & $\frac{144-24x+xx}{x}$ quartus; adeoque $\frac{xx}{12-x} + \frac{144-24x+xx}{x} = 20$. Et per reductionem $xx = 12x - 30\frac{6}{7}$ seu $x = 6 + \sqrt{5\frac{1}{7}}$. Quo invento cæteri numeri è superioribus dantur.

PROB. XV.

Invenire quatuor numeros continuè proportionales, quorum datur summa a, & summa quadratorum b.

Etsi desideratas quantitates ut plurimum immediate quærere solemus, siquando tamen duæ obvenerint ambiguæ, hoc est quæ conditionibus omnino similibus præditæ sunt, (ut hic duo medii & duo extremi numerorum quatuor proportionalium) præstat alias quantitates non ambiguas quærere per quas hæ determinantur, quemadmodum harum summam vel differentiam vel rectangulum. Ponamus ergo summam duorum mediorum numerorum esse s, & rectangulum r; & erit summa extremorum $a - s$, & rectangulum etiam r propter proportionalitatem. Jam ut ex his eruantur quatuor illi numeri, pone x primum & y secundum; eritque $s - y$ tertius; & $a - s - x$ quartus; & rectangulum sub mediis $sy - yy = r$, indeque medii $y = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}ss - r}$ & $s - y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - r}$: Item rectangulum sub extremis $ax - sx - xx = r$,

indeq; extremi $x = \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4} - r}$,

& $a - s - x = \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4} - r}$.

Summa

Summa quadratorum ex hisce quatuor numeris est $2ss - 2as + aa - 4r$ quæ est $= b$. Ergo $r = \frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}as + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}b$, quo substituto pro r prodeunt quatuor numeri ut sequitur.

$$\text{Duo medii} \begin{cases} \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa.} \\ \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa.} \end{cases}$$

$$\text{Duo extremi} \begin{cases} \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss.} \\ \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss.} \end{cases}$$

Restat tamen etiamnum inquirendus valor ipsius s. Quare ad abbreviandos terminos pro numeris hisce substitue.

$$\frac{1}{2}s + p. \qquad \frac{a-s}{2} + q.$$

$$\&$$

$$\frac{1}{2}s - p. \qquad \frac{a-s}{2} - q.$$

Et pone rectangulum sub secundo & quarto æquale quadrato tertii siquidem hæc problematis conditio nondum impleatur, eritque $\frac{as-ss}{4} - \frac{1}{2}qs + \frac{pa-ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss - ps + pp$. Pone etiam rectangulum sub primo & tertio æquale quadrato secundi, & erit $\frac{as-ss}{4} + \frac{1}{2}qs \frac{-pa+ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss + ps + pp$. Harum æquationum priorem aufer è posteriori & restabit $qs - pa + ps = 2ps$, seu $qs = pa + ps$. Restitue jam $\sqrt{\frac{1}{4}b -}$

$\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$ in locum p, & $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}$ in locum q, & habebitur $s\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss} = \overline{a+s} \times \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$. Et quadrando $ss = -\frac{b}{a}s + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b$, seu $s = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b}$, quo invento dantur quatuor numeri quæsiti è superioribus.

PROB. XVI.

Si pensio annua librarum a per quinque annos proxime sequentes solvenda, ematur parata pecunia c, quæritur quanti æstimanda sit usura usuræ centum librarum per annum.

Pone $1 - x$ usuram usuræ pecuniæ x in anno, hoc est quod pecunia 1 post annum solvenda valeat x paratæ pecuniæ; & per analogiam pecunia a post annum solvenda valebit ax paratæ pecuniæ, post duos annos axx, post tres ax^3, post quatuor ax^4 & post quinque ax^5. Adde jam hos quinque terminos & erit $ax^5 + ax^4 + ax^3 + axx + ax = c$, seu $x^5 + x^4 + x^3 + xx + x = \frac{c}{a}$, æquatio quinque dimensionum, cujus ope cum x per † regulas post docendas inventum fuerit, pone $x . 1 :: 100 . y$. Et erit $y - 100$ usura usuræ centum librarum per annum.

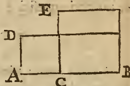
Atque has in quæstionibus ubi solæ quantitatum proportiones absque positionibus linearum considerandæ veniunt, instantias dedisse sufficiat: Pergamus jam ad Problematum Geometricorum solutiones.

G *Quo-*

† *Nempe inveniendo figuras primas radicis per constructionem quamvis mechanicam & reliquas per methodum Vietæ.*

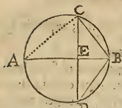
Quomodo Quæstiones Geometricæ ad æquationem redigantur.

QUæstiones *Geometricæ* eadem facilitate iisdemque legibus ad æquationes nonnunquam redigi possunt ac quæ de abstractis quantitatibus proponuntur. Ut si recta A B in extrema & media proportione secanda sit in C, hoc est ita ut BE quadratum maximæ partis sit æquale rectangulo B D sub tota & minore parte contento: Posito



$AB = a$, & $BC = x$ erit $AC = a - x$, & $xx = a$ in $a - x$; æquatio quæ per reductionem dat $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$.

Sed in rebus Geometricis quæ frequentius occurrunt, à variis linearum positionibus & relationibus complexis ita dependere solent ut egeant ulteriori inventione & artificio quo ad Algebraicos terminos deduci possint. Et licet in hujusmodi casibus difficile sit aliquid præscribere, & cujusque ingenium sibi debeat esse operandi norma: Conabor tamen discentibus viam præsternere. Sciendum est itaque quod quæstiones circa easdem lineas definito quolibet modo sibi invicem relatas, possint varie proponi, ponendo alias atque alias quærendas esse ex aliis atque aliis datis. Sed de quibuscunque tamen datis vel quæsitis instituitur quæstio, solutio ejus eadem plane methodo ex Analyseos serie perficietur, nulla omnino circumstantia variata præter fictas linearum species sive nomina quibus datas à quæsitis solemus distinguere. Quemadmodum si quæstio sit de Isoscele C B D in circulum inscripto, cujus latera BC, BD, & basis CD cum



cum diametro circuli AB conferenda sunt: Ea vel proponi potest de investigatione *diametri* ex datis lateribus & basi, vel de investigatione *basis* ex datis lateribus & diametro, vel denique de investigatione *laterum* ex datis basi & diametro: Sed utcunque proponitur, redigetur ad æquationem per eandem seriem Analyseos. Nempe si quæratur *Diameter* pono $AB = x$, $CD = a$, & BC vel $BD = b$. Tum (ducta AC) propter similia triangula ABC & CBE est AB. BC :: BC. BE, sive $x. b :: b.$ BE. Quare $BE = \frac{bb}{x}$. Est & $CE = \frac{1}{2}CD$ sive $\frac{1}{2}a$: Et propter angulum CEB rectum, $CEq + BEq = BCq$, hoc est $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$. Quæ æquatio per reductionem dabit quæsitum x.

Sin quæratur *Basis*, pono $AB = c$, $CD = x$, & BC vel $BD = b$. Tum (ducta AC) propter similia triangula ABC & CBE est AB. BC :: BC. BE, sive $c. b :: b.$ BE. Quare $BE = \frac{bb}{c}$. Est & $CE = \frac{1}{2}CD$ sive $\frac{1}{2}x$, & propter angulum CEB rectum $CEq + BEq = BCq$ hoc est $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$; æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x.

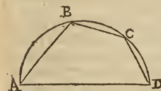
Atque ita si *Latus* BC vel BD quæratur, pono $AB = c$, $CD = a$ & BC vel $BD = x$. Et (AC ut ante ducta) propter similia triangula ABC & CBE est AB. BC :: BC. BE; sive $c. x :: x.$ BE. Quare $BE = \frac{xx}{c}$. Est & $CE = \frac{1}{2}CD$ sive $\frac{1}{2}a$; & propter angulum CEB rectum est $CEq + BEq = BCq$,

$= BCq$, hoc est $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$; æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x.

Vides itaque quod in unoquoque casu calculus quo pervenitur ad æquationem, per omnia similis sit, & eandem æquationem pariat, excepto tantum quod lineas aliis atque aliis literis designavi prout datæ vel quæsitæ ponuntur. Ex diversis quidem datis & quæsitis oritur diversitas in reductione æquationis inventæ: Nam æquationis $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$ alia est reductio ut obtineatur $x = \frac{2bb}{\sqrt{4bb - aa}}$ valor de AB, & æquationis $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$ alia reductio ut obtineatur $x = \frac{2b}{c}\sqrt{cc - bb}$ valor de CD; & æquationis $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$ reductio longe alia ut obtineatur $x = \sqrt{\frac{1}{2}cc \pm \frac{1}{2}c\sqrt{cc - aa}}$ valor de BC vel BD: (perinde ut hæc $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{cc} = bb$, ad eliciendum c, a, vel b diversis modis reduci debet:) sed in harum æquationum inventione nulla fuit diversitas. Et hinc est quod jubent ut nullum inter datas & quæsitas quantitates habeatur discrimen. Nam cum eadem computatio cuique casui datorum & quæsitorum competat, convenit ut sine discrimine concipiantur & conferantur quo rectius judicetur de modis computandi: Vel potius convenit ut fingas quæstionem de ejusmodi datis & quæsitis propositam esse per quas arbitreris te posse ad æquationem facillime pervenire.

Proposito

Propoſito igitur aliquo Problemate, quantitates quas involvit confer, & nullo inter datas & quæſitas habito diſcrimine, perpende quomodo aliæ ex aliis dependeant ut cognoſcas quænam ſi aſſumantur, ſynthetice gradiendo, dabunt cæteras. Ad quod faciendum non opus eſt ut prima fronte de modo cogites quo aliæ ex aliis per calculum Algebraicum deduci poſſint, ſed ſufficit animadverſio generalis quod poſſint directo nexu quomodocunque deduci. Verbi gratia; ſi quæſtio ſit de circuli diametro A D tribuſque lineis A B, B C, & C D in ſemicirculo inſcriptis, & ex reliquis datis quæratur B C; primo intuitu manifeſtum eſt diametrum A D determinare ſemicirculum, dein lineas A B & C D per inſcriptionem determinare puncta B & C atque adeo quæſitum B C, idque nexu maxime directo; & quo pacto tamen B C ex his datis per Analyſin eruatur non ita manifeſtum eſt. Hoc idem quoque de A B vel C D ſi ex reliquis datis quærerentur, intelligendum eſt. Quod ſi A D ex datis A B, B C & C D quæreretur, æque patet id non fieri poſſe Synthetice; ſiquidem punctorum A ac D diſtantia dependet ex angulis B & C, & illi anguli ex circulo cui datæ lineæ ſunt inſcribendæ, & ille circulus non datur ignota A D diametro. Rei igitur natura poſtulat ut A D non Synthetice ſed ex ejus aſſumptione quæratur ut ad data fiat regreſſus.



Cum varios ordines quibus termini quæſtionis ſic evolvi poſſint perſpexeris, *E ſyntheticis quoſlibet adhibe, aſſumendo lineas tanquam datas à quibus ad alias facillimus videtur progreſſus & ad ipſas viciſſim difficillimus.* Nam computatio ut per varia media poſſit incedere, tamen ab iſtis lineis initium ſumet;

ac promptius perficietur fingendo quæstionem ejusmodi esse ac si de istis datis & quæsito aliquo ab istis facillimè prodituro institueretur, quam de quæstione prout revera proponitur cogitando. Sic in exemplo jam allato si ex reliquis datis quæritur A D; cum id sythetice fieri non posse percipiam, sed ab ipso tamen, si modo daretur, discursum ad alia directo nexu incedere, assumo A D tanquam datum & abinde computationem non secus incipio quam si revera daretur & aliqua ex datis A B, B C & C D quæreretur. Atque hac methodo computationem ab assumptis ad cæteras quantitates eo more promovendo quo linearum relationes dirigunt, æquatio tandem inter duos ejusdem alicujus quantitatis valores semper obtinebitur, sive ex valoribus unus sit litera sub initio operis quantitati pro nomine imposita, & alter per computationem inventus, sive uterque per computationem diversimode institutam inveniatur.

Cæterum ubi terminos quæstionis sic in genere comparaveris, plus artis & inventionis in eo requiritur ut advertas particulares istos nexus sive linearum relationes quæ computationi accommodantur. Nam quæ laxius perpendenti videantur immediate & relatione proxima connecti, cum illam relationem algebraice designare volumus, circuitum plerumque quoad constructiones Schematum de novo moliendas & computationem per gradus promovendam exigunt: Quemadmodum de B C ex A D, A B & C D colligendo constare potest. Per ejusmodi enim propositiones vel enunciationes solummodo gradiendum est quæ aptæ sunt ut terminis algebraicis designentur, quales præsertim ab Axiom. 19, Prop. 4. lib. 6, & Prop. 47. lib. 1. Elem. proveniunt.

Imprimis itaque promovetur calculus per additionem vel subductionem linearum eo ut ex valori-

bus

bus partium obtineatur valor totius, vel ex valoribus totius & unius partis obtineatur valor alterius.

Secundo promovetur ex linearum proportionalitate: ponimus enim (ut supra) factum à mediis terminis divisum per alterutrum extremorum esse valorem alterius. Vel quod perinde est, si valores omnium quatuor proportionalium prius habeantur, ponimus æqualitatem inter factos extremorum & factos mediorum. Linearum vero proportionalitas ex triangulorum similitudine maxime se prodit, quæ cum ex æqualitate angulorum dignoscatur, in iis comparandis Analysta debet esse perspicax, atque adeo non ignorabit Prop. 5, 13, 15, 29, & 32. lib. 1. Prop. 4, 5, 6, 7, & 8. lib. 6. Et Prop. 20, 21, 22, 27 ac 31. lib. 3. Elementorum. Quibus etiam referri potest Prop. 3. lib. 6, ubi ex proportionalitate linearum colligitur angulorum æqualitas & contra. Atque idem aliquando præstant Prop. 35 & 36. lib. 3.

Tertio promovetur per additionem vel subductionem quadratorum. In triangulis nempe rectangulis addimus quadrata minorum laterum ut obtineatur quadratum maximi, vel à quadrato maximi lateris subducimus quadratum unius è minoribus ut obtineatur quadratum alterius.

Atque his paucis fundamentis (si adnumeretur Prop. 1. lib. 6. Elem. cum de superficiebus agitur, ut & aliquæ propositiones ex lib. 11 & 12. desumptæ cum agitur de solidis,) tota Ars Analytica quoad Geometriam rectilineam innititur. Quin etiam ad solas linearum ex partibus compositiones & similitudines triangulorum possunt omnes Problematum difficultates reduci; adeo ut non opus sit alia Theoremata adhibere: quippe quæ omnia in hæc duo resolvi possunt, & proinde solutiones etiam quæ ex istis depromuntur. Inque hujus rei

instantiam subjunxi Problema de perpendiculo in basem obliquanguli trianguli demittendo sine adjumento Prop. 47. lib. 1 solutum. Etsi vero juvet simplicissima principia à quibus problematum solutiones dependent non ignorasse, & istis solis adhibitis posse quælibet solvere; expeditionis tamen gratia convenit ut non solum Prop. 47. lib. 1. Elem. cujus usus est frequentissimus, sed & alia etiam *Theoremata* nonnunquam adhibeantur.

Quemadmodum si perpendiculo in basem obliquanguli trianguli demisso, de segmentis basis ad calculum promovendum agatur; ex usu erit scire quod, Differentia quadratorum è lateribus æquetur duplo rectangulo sub basi & distantia perpendiculi à medio basis.

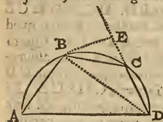
Si trianguli alicujus verticalis angulus bisecetur, computationi non solum inserviet quod basis secetur in ratione laterum, sed etiam quod differentia factorum à lateribus & à segmentis basis æquetur quadrato lineæ bisecantis angulum.

Si de figuris in circulo inscriptis res est, Theorema non raro subveniet quod Inscripti cujuslibet quadrilateri factus à diagoniis æquetur summæ factorum à lateribus oppositis.

Et hujusmodi plura inter exercendum observet Analysta, & in penum forte reservet; sed parcius utatur si pari facilitate aut non multo difficilius possit solutionem è simplicioribus computandi principiis extruere. Quamobrem ad tria primo proposita tanquam notiora, simpliciora, magis generalia, pauca, & omnibus tamen sufficientia animum præsertim advertat, & omnes difficultates ad ea præcæteris reducere conetur.

Sed ut hujusmodi Theoremata ad solvenda Problemata accommodari possint, *Schemata* plerumque sunt ultra *construenda*, idque sæpissime producendo aliquas ex lineis donec secent alias, aut sint assignatæ

natæ longitudinis; vel ab insigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares, vel insigniora puncta conjungendo, ut & aliter nonnunquam construendo, prout exigunt status Problematis, & Theoremata quæ ad ejus solutionem adhibentur. Quemadmodum si duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertia quadam efficiant, producimus forte ut concurrentes constituant triangulum cujus anguli & proinde laterum rationes dantur. Vel si quilibet angulus detur, aut sit alicui æqualis, in triangulum sæpe complemus specie datum, aut alicui simile, idque vel producendo aliquas ex lineis in schemate vel subtensam aliter ducendo. Si triangulum sit obliquangulum, in duo rectangula sæpe resolvimus, demittendo perpendiculum. Si de figuris multilateris agatur, resolvimus in triangula, ducendo lineas diagonales: Et sic in cæteris; ad hanc metam semper collimando *ut schema in triangula vel data, vel similia, vel rectangula resolvatur*. Sic in exemplo proposito duco diagonium BD, ut Trapezium ABCD in duo triangula, ABD rectangulum, & BDC obliquangulum resolvatur. Deinde resolvo triangulum obliquangulum in duo rectangula demittendo perpendiculum à quolibet ejus angulo B, C, vel D in latus oppositum: quemadmodum à B in CD productam ad E ut huic perpendiculo BE occurrat. Interea vero cum anguli BAD & BCD duos rectos (per 22. 3. Elem.) perinde ac BCE & BCD constituant; percipio angulos BAD & BCE æquales esse, adeoque triangula BCE ac DAB similia. Atque ita video computationem (assumendo AD, AB & BC tanquam



quam si C D quæreretur) ad hunc modum institui posse, viz. A D & A B (propter tri. A B D rect.) dant B D. A D, A B, B D & B C (propter sim. tri. A B D & C E B) dant B E & C E. B D & B E (propter triang. B E D rect.) dant E D; & E D — E C dat C D. Unde obtinebitur æquatio inter valorem de C D sic inventum & literam pro ea suffectam. Possumus etiam (& maximam partem satius est quam opus in serie continuata nimis prosequi,) à diversis principiis computationem incipere, aut saltem diversis modis ad eandem quamlibet conclusionem promovere, ut duo tandem obtineantur ejusdem cujusvis quantitatis valores qui æquales ponantur. Sic A D, A B & B C dant B D, B E & C E ut prius; deinde C D + C E dat E D; ac denique B D & E D (propter triang. rect. B E D) dant B E. Potest etiam computatio hac lege optime institui ut valores quantitatum investigentur quibus alia quæpiam relatio cognita intercedit, & illa deinde relatio æquationem dabit. Sic cum relatio inter lineas B D, D C, B C & C E ex Prop. 12. lib. 2. Elem. constet; nempe quod sit $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$: Quæro BDq ex assumptis A D & A B; ac C E ex assumptis A D, A B & B C. Et assumendo denique C D facio $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$. Ad hos modos & hujusmodi consiliis ductus, de serie Analyseos, deque schemate propter eam construendo semper debes una prospicere.

Ex his credo manifestum est quid sibi velint Geometræ cum jubent putes factum esse quod quæris. Nullo enim inter cognitas & incognitas quantitates habito discrimine, quaslibet ad ineundum calculum assumere potes quasi omnes ex prævia solutione fuissent notæ, & non amplius de solutione Problematis, sed de probatione solutionis ageretur. Sic in primo ex tribus jam descriptis computandi modis,

modis, etsi forte AD revera quæratur, fingo tamen CD quærendum esse, quasi vellem probare an valor ejus ab AD derivatus quadret cum ejus quantitate prius cognita. Sic etiam in duobus posterioribus modis pro meta non propono quantitatem aliquam quærendam esse, sed æquationem è relationibus linearum utcunque eruendam: Et in ejus rei gratiam assumo omnes AD, AB, BC, & CD tanquam notas, perinde ac si (quæstione prius soluta) de tentamine jam ageretur an conditionibus ejus hæ probe satisfaciant, quadrando cum quibuslibet æquationibus quas linearum relationes produnt. Opus quidem hac ratione & consiliis prima fronte aggressus sum, sed cum ad æquationem deventum est sententiam muto, & quantitatem desideratam per istius æquationis reductionem & solutionem quæro. Sic denique plures quantitates tanquam cognitas sæpenumero assumimus quam in statu quæstionis exprimuntur. Hujusque rei insignem in 55° sequentium problematum instantiam videre est, ubi a, b & c in æquatione $aa + bx + cxx = yy$, pro determinatione Sectionis Conicæ assumpsi, ut & alias etiam lineas r, s, t, v de quibus Problema prout proponitur nihil innuit. Nam quaslibet quantitates assumere licet quarum ope possibile sit ad æquationes pervenire: Hoc solum cavendo ut ex illis tot æquationes obtineri possint quot assumptæ sunt quantitates revera incognitæ.

Postquam de computandi methodo constat & ornatur schema, quantitatibus quæ computationem ingredientur (hoc est ex quibus assumptis aliarum valores derivandi sunt, donec tandem ad æquationem perveniatur) nomina impone, delegendo quæ problematis omnes conditiones involvunt, & operi præ cæteris accommodatæ videntur, & conclusionem (quantum possis conjicere) simpliciorem reddent, sed non plures tamen quam proposito sufficiunt. Itaque pro quantitatibus quæ ex aliarum

voca-

vocabulis facile deduci possint, propria vocabula vix tribuas. Sic ex tota linea & ejus partibus, ex tribus lateribus trianguli rectanguli, & ex tribus vel quatuor proportionalibus unum aliquod minimum sine nomine permittere solemus, eo quod valor ejus è reliquorum nominibus facile derivari possit. Quemadmodum in exemplo jam allato si dicam $AD = x$ & $AB = a$ ipsum BD nulla litera designo quod sit tertium latus trianguli rectanguli ABD & proinde valeat $\sqrt{xx - aa}$.

Dein si dicam $BC = b$, cum triangula DAB & BCE sint similia & inde lineæ $AD . AB :: BC . CE$ proportionales, quarum tribus AD, AB, & BC imposita sunt nomina; ea propter quartam CE sine nomine permitto, & ejus vice valorem $\frac{ab}{x}$ ex hac proportionalitate detectum usurpo. Atque ita si DC vocetur c, ipsi DE nomen non assigno quod ex partibus ejus DC & CE, sive c & $\frac{ab}{x}$, valor $c + \frac{ab}{x}$ prodeat.

Cæterum dum de his moneo, Problema ad æquationem pene redactum est. Nam postquam literæ pro speciebus principalium linearum præscriptæ sunt, nihil aliud agendum restat quam ut ex istis speciebus valores aliarum linearum juxta methodum præconceptam eruantur, donec modo quovis proviso in æquationem coeant. Et in hoc casu nihil restare video nisi ut per triangula rectangula BCE & BDE dupliciter eliciam BE. Nempe est

BCq

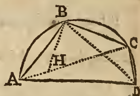
$BCq - CEq$ (five $bb - \frac{aabb}{xx}$) $= BEq$, ut & $BDq - DEq$ (five $xx - aa - cc - \frac{2abc}{x} - \frac{aabb}{xx}$) $= BEq$. Et hinc (utrobique deleto $\frac{aabb}{xx}$) æquationem habebo $bb = xx - aa - cc - \frac{2abc}{x}$: Quæ reducta fit $x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x + 2abc$.

Cum vero de folutione Problematis hujus plures modos etfi non multum diffimiles in præcedentibus recenfuerim quorum ifte de Prop. 12. Lib. 2. Elem. defumptus fit cæteris quodammodo concinnior; eundem placet etiam fubjungere. Sit itaque $AD = x$, $AB = a$, $BC = b$, & $CD = c$, eritque $BDq = xx - aa$, & $CE = \frac{ab}{x}$ ut prius. Hifce dein fpeciebus in Theorema $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$ fubftitutis orietur $xx - aa - bb - cc = \frac{2abc}{x}$; & facta reductione $x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x + 2abc$. Ut ante.

Sed ut pateat quanta fit in folutionum inventione varietas, & proinde quod in eas incidere prudenti Geometræ non fit admodum difficile: Vifum fuit plures adhuc modos hoc idem perficiendi docere. Atque equidem ducto Diagonio BD fi vice perpendiculi BE à puncto B in latus DC fupra demiffi demittatur perpendiculum à puncto D in latus BC vel à puncto C in latus BD, quo obliquangulum triangulum BCD in duo rectangula utcunque

que resolvatur, iisdem ferme quas jam descripsi methodis ad æquationem pervenire licet. Sunt & alii modi ab istis satis differentes.

Quemadmodum si diagonii duo A C & B D ducantur, dabitur B D ex assumptis A D & A B; ut & A C ex assumptis A D & C D, deinde per notum Theorema de figuris quadrilateris in circulo inscriptis, nempe quod sit $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$ obtinebitur æquatio. Stantibus itaque linearum AD, AB, BC, CD vocabulis x, a, b, c; erit $BD = \sqrt{xx - aa}$ & $AC = \sqrt{xx - cc}$ per 47. 1. Elem. Et his linearum speciebus in Theorema jam recensitum substitutis, exibit $xb + ac = \sqrt{xx - cc} \times \sqrt{xx - aa}$. Cujus æquationis partibus denique quadratis & reductis obtinebitur iterum



$$x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix}\, x + 2abc.$$

Cæterum ut pateat etiam quo pacto solutiones ex isto Theoremate petitæ possint inde ad solas triangulorum similitudines redigi; erigatur B H ipsi BC perpendicularis & occurrens A C in H, & fient triangula B C H, B D A similia, propter angulos ad B rectos, & ad C ac D (per 21. 3. Elem.) æquales; ut & triangula B C D, B H A similia, propter æquales angulos tum ad B (ut pateat demendo communem angulum D B H à duobus rectis,) tum ad D ac A (per 21. 3. Elem.) Videre est itaque quod ex proportionalitate BD. AD :: BC. HC detur HC; ut & A H ex proportionalitate B D. C D :: AB. AH. Unde cum sit $AH + HC = AC$, habebitur

bitur æquatio. Stantibus ergo præfatis linearum vocabulis x, a, b, c, nec non ipsarum A C & B D valoribus $\sqrt{xx-cc}$ & $\sqrt{xx-aa}$; prima proportionalitas dabit $HC = \frac{bx}{\sqrt{xx-aa}}$, & secunda dabit $AH = \frac{ac}{\sqrt{xx-aa}}$. Unde propter $AH + HC = AC$ erit $\frac{bx+ac}{\sqrt{xx-aa}} = \sqrt{xx-cc}$; æquatio quæ (multiplicando per $\sqrt{xx-aa}$ & quadrando) reducetur ad formam in præcedentibus sæpius descriptam.

Adhæc ut magis pateat quanta sit solvendi copia; producantur B C & A D donec conveniant in F, & fient triangula A B F & C D F similia, quippe

quorum angulus ad F communis est, & anguli A B F & C D F (dum complent ang. C D A ad duos rectos per 13. 1 & 22. 3. Elem.) æquales. Quamobrem si præter quatuor terminos de quibus instituitur quæstio, daretur A F, proportio A B. A F : : C D. C F daret C F. Item A F − A D daret D F, & proportio C D. D F : : A B. B F daret B F; unde (cum sit B F − C F = B C) emergeret æquatio. Sed cum duæ quantitates incognitæ A D ac D F tanquam datæ assumantur, restat alia æquatio invenienda. Demitto ergo B G in A F ad rectos angulos

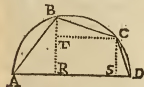
gulos, & proportio A D. A B :: A B. A G. dabit A G; quo habito, Theorema è 13. 2. Elem. petitum, nempe quod sit $BFq + 2 FAG = ABq + AFq$, dabit æquationem alteram. Stantibus ergo a, b, c, x ut prius, & dicto $AF = y$: erit (insistendo vestigiis Theoriæ jam excogitatæ) $\frac{cy}{a} = CF$. $y - x = DF$. $\frac{\overline{y-x} \times a}{c} = BF$. Indeque $\frac{\overline{y-x} \times a}{c} - \frac{cy}{a} = b$, æquatio prima. Erit etiam $\frac{aa}{x} = AG$, adeoque $\frac{aayy - 2aaxy + aaxx}{cc} + \frac{2aay}{x} = aa + yy$, æquatio secunda. Quæ duæ per reductionem dabunt æquationem desideratam. Nempe valor ipsius y per æquationem priorem inventus est $\frac{abc + aax}{aa - cc}$, qui in secundam substitutus, dabit æquationem ex qua recte dispofita fiet

$$x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x + 2abc, \text{ ut ante.}$$

Atque ita si A B ac D C producantur donec sibi mutuo occurrant, solutio haud aliter se habebit, nisi forte futura sit paulo facilior. Quare aliud hujus rei specimen è fonte multum dissimili petitum potius subjungam, quærendo nempe aream quadrilateri propositi, idque dupliciter. Duco igitur diagonium B D ut in duo triangula quadrilaterum resolvatur. Dein usurpatis linearum vocabulis x, a, b, c ut ante, invenio $BD = \sqrt{xx - aa}$ indeque $\frac{1}{2} a \sqrt{xx - aa}$ ($= \frac{1}{2} AB \times BD$) aream trianguli A B D. Porro demisso B E perpendiculariter in

in CD, (erit propter similia triangula ABD, BCE) AD. BD :: BC. BE, & proinde $BE = \frac{b}{x}\sqrt{xx-aa}$. Quare etiam $\frac{bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ ($= \frac{1}{2}CD \times BE$) erit area trianguli BCD. Hasce jam areas addendo orietur $\frac{ax+bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ area totius quadrilateri. Non secus ducendo diagonium AC & quærendo areas triangulorum ACD & ACB, easque addendo, rursus obtinebitur area quadrilateri $\frac{cx+ba}{2x}\sqrt{xx-cc}$. Quare ponendo hasce areas æquales & utrasque multiplicando per $2x$, habebitur $\overline{ax+bc}\sqrt{xx-aa} = \overline{cx+ba} \times \sqrt{xx-cc}$, æquatio quæ quadrando ac dividendo per $aax - ccx$ redigetur ad formam sæpius inventam $x^3 = \begin{matrix}+aa\\+bb\\+cc\end{matrix}\, x + 2abc$.

Ex his constare potest quanta sit solvendi copia & obiter quod alii modi sint aliis multo concinniores. Quapropter si in primas de solutione Problematis alicujus cogitationes modus computationi male accommodatus inciderit, relationes linearum iterum evolvendæ sunt donec modum quam poteris idoneum & elegantem machinatus fueris. Nam quæ leviori curæ se offerunt laborem satis molestum plerumque parient si ad opus adhibeantur. Sic in Problemate de quo agitur nil difficilius foret in sequentem modum quam in aliquem è præcedentibus incidere. Demissis nempe BR & CS ad AD nor-



malibus, ut & C T ad B R, figura resolvetur in triangula rectangula. Et videre est quod A D & A B dant A R, A D & C D dant S D, A D—A R —S D dat R S vel T C. Item A B & A R dant B R, C D & S D dant C S vel T R, & B R—T R dat B T. Denique B T ac T C dant B C, unde obtinebitur æquatio. Siquis autem hoc modo computationem aggressus fuerit, is in terminos Algebraicos profusiores quam sunt ulli præcedentium incidet & ad finalem æquationem ægrius reducibiles.

Et hæc de solutione problematum in rectilinea Geometria; nisi forte operæ pretium fuerit annotasse præterea quod cum anguli sive positiones linearum per angulos expressæ statum quæstionis ingrediuntur, angulorum vice debent adhiberi lineæ aut linearum proportiones, tales nempe quæ ab angulis datis possunt per calculum Trigonometricum derivari; aut à quibus inventis anguli quæsiti per eundem calculum prodeunt; hoc est quæ se mutuo determinant: cujus rei plures instantias videre est in sequentibus.

Quod ad Geometriam circa lineas curvas attinet, illæ designari solent vel describendo eas per motum localem rectarum, vel adhibendo æquationes indefinite exprimentes relationem rectarum certa aliqua lege dispositarum & ad curvas desinentium. Idem fecerunt Veteres per sectiones Solidorum, sed minus commode. Computationes vero quæ curvas primo modo descriptas respiciunt haud secus quam in præcedentibus peraguntur. Quemadmodum si A K C sit curva linea descripta per K verticale punctum normæ A K ϕ, cujus unum crus A K per punctum A positione datum libere dilabitur, dum alterum K ϕ datæ longitudinis super rectam A D positione datam promovetur, & quæratur punctum C in quo recta quævis C D positi-

one

one data hanc curvam ſecabit; duco rectas ACF quæ normam in poſitione quæſita referant, & relatione linearum (ſine aliquo dati & quæſiti diſcrimine aut reſpectu ad curvam) conſiderata, percipio dependentiam cæterarum à CF & qualibet harum quatuor BC, BF, AF & AC Syntheticam eſſe; quarum duas itaque ut $CF = a$ & $CB = x$ aſſumo, & inde computum ordiendo ſtatim lucratus ſum $BF = \sqrt{aa - xx}$ & $AB = \dfrac{xx}{\sqrt{aa - xx}}$ propter ang. rectum CBF, lineaſque BF. BC::BC. AB continue proportionales. Porro ex data poſitione CD datur AD quam itaque dico b, datur etiam ratio BC ad BD quam pono d ad e & fit $BD = \dfrac{ex}{d}$ & $AB = b - \dfrac{ex}{d}$. Eſt ergo $b - \dfrac{ex}{d} = \dfrac{xx}{\sqrt{aa - xx}}$, æquatio quæ (quadrando partes & multiplicando per $aa - xx$ &c.) reducetur ad hanc formam $x^4 = \dfrac{2bdex^3 \begin{matrix} -bbdd \\ +aaee \end{matrix} xx - 2aabdex + aabbdd}{dd + ee}$;

 unde

unde demum è datis a, b, d, & e erui debet x per regulas poſt tradendas, & intervallo iſto x ſive BC acta ipſi AD parallela recta ſecabit CD in quæſito puncto C.

Quod ſi non deſcriptiones Geometricæ ſed æquationes pro curvis lineis deſignandis adhibeantur, computationes eo pacto faciliores & breviores evadent, in quantum ejuſmodi æquationes ipſis lucro cedunt. Quemadmodum ſi datæ Ellipſeos ACE interſectio C cum recta CD poſitione data quæratur; pro Ellipſi deſignanda ſumo notam aliquam æquationem ei propriam, ut $rx - \frac{r}{q}xx = yy$ ubi x indefinite ponitur pro qualibet axis parte Ab vel AB, & y pro perpendiculo bc vel BC ad curvam terminato; r vero & q dantur ex datâ ſpecie Ellipſis. Cum itaque CD poſitione detur, dabitur & AD, quam dic a; & erit BD $a - x$, dabitur etiam angulus ADC & inde ratio BD ad BC quam dic 1 ad e, & erit BC $(y) = ea - ex$, cujus quadratum $eeaa - 2eeax + eexx$ æquabitur $rx - \frac{r}{q}xx$. Indeque per reductionem orietur $xx = \frac{2aeex + rx - aaee}{ee + \frac{r}{q}}$, ſeu

$$x = \frac{aee + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{rr}{4ee} - \frac{aar}{q}}}{ee + \frac{r}{q}}.$$

Quin-

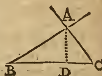
Quinetiam etsi Curva per descriptionem Geometricam vel per sectionem solidi designetur, potest tamen inde æquatio obtineri quæ naturam Curvæ definiet, adeoque huc omnes Problematum quæ circa eam proponuntur difficultates reduci.

Sic in exemplo priori si A B dicatur x & B C y, tertia proportionalis B F erit $\frac{yy}{x}$, cujus quadratum una cum quadrato B C æquatur C F q, hoc est $\frac{y^4}{xx} + yy = aa$; sive $y^4 + xxyy = aaxx$. Estque hæc æquatio qua Curvæ A K C unumquodque punctum C unicuique basis longitudini A B congruens (adeoque ipsa Curva) definitur, & è qua proinde solutiones Problematum quæ de hac curva proponuntur petere liceat.

Ad eundem fere modum cum curva non datur specie sed determinanda proponitur, possis pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat; & hanc pro ea designanda tanquam si daretur assumere, ut ex ejus assumptione quomodocunque perveniatur ad æquationes ex quibus assumpta tandem determinentur: Cujus rei exempla habes in nonnullis sequentium problematum quæ in pleniorem illustrationem hujus doctrinæ & exercitium discentium congessi, quæque jam pergo tradere.

PROB. I.

Data recta terminata BC a cujus extremitatibus duæ rectæ BA, CA ducuntur in datis angulis ABC, ACB: Invenire AD altitudinem concursus A supra datam BC.

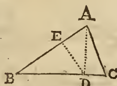


SIT BC $= a$, & AD $= y$; & cum angulus ABD detur, dabitur (ex tabula sinuum vel tangentium) ratio inter lineas AD & BD quam pone ut d ad e. Est ergo $d.e::$ AD(y). BD Quare BD $= \frac{ey}{d}$. Similiter propter datum angulum ACD dabitur ratio inter AD ac DC quam pone ut d ad f & erit DC $= \frac{fy}{d}$. At BD + DC = BC, hoc est $\frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$. Quæ reducta multiplicando utramque partem æquationis per d, ac dividendo per $e+f$ evadit $y = \frac{ad}{e+f}$.

PROB.

PROB. II.

Cujuslibet Trianguli ABC datis lateribus AB, AC, & Basi BC quam perpendiculum AD ab angulo verticali secat in D: Invenire segmenta BD ac DC.



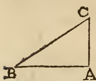
SIT $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, & $BD = x$, eritque $DC = c - x$. Jam cum $ABq - BDq$ $(aa - xx)$ $= ADq$; & $ACq - DCq$ $(bb - cc + 2cx - xx) = ADq$: Erit $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$; quæ per reductionem fit $\frac{aa - bb + cc}{2c} = x$.

Cæterum ut pateat omnes omnium Problematum difficultates per solam linearum proportionalitatem sine adminiculo Prop. 47. primi Elementorum, licet non absque circuitu, enodari posse; placuit sequentem hujus solutionem ex abundanti subjungere. A puncto D in latus AB demitte DE normalem, & stantibus jam positis linearum nominibus, erit AB. BD :: BD. BE.

$a. x :: x. \frac{xx}{a}$. Et $BA - BE$ $(a - \frac{xx}{a})$ $= EA$. Nec non EA. AD :: AD. AB adeoque $EA \times AB$ $(aa - xx) = ADq$. Et sic ratiocinando circa triangulum ACD invenietur iterum $ADq = bb - cc + 2cx - xx$. Unde obtinebitur ut ante $x = \frac{aa - bb + cc}{2c}$.

PROB. III.

Trianguli rectanguli ABC perimetro & area datis invenire hypotenusam BC.



ESTO perimeter a, area bb, $BC = x$, & $AC = y$; eritque $AB = \sqrt{xx - yy}$; unde rursus perimeter $(BC + AC + AB)$ est $x + y + \sqrt{xx - yy}$, & area ($\frac{1}{2}AC \times AB$) est $\frac{1}{2}y\sqrt{xx - yy}$. Adeoque $x + y + \sqrt{xx - yy} = a$, & $\frac{1}{2}y\sqrt{xx - yy} = bb$.

Harum æquationum posterior dat $\sqrt{xx - yy} = \frac{2bb}{y}$ quare scribo $\frac{2bb}{y}$ pro $\sqrt{xx - yy}$ in æquatione priori ut assymmetria tollatur; & prodit $x + y + \frac{2bb}{y} = a$, sive multiplicando per y, & ordinando $yy = ay - xy - 2bb$. Porro ex partibus æquationis prioris aufero $x + y$ & restat $\sqrt{xx - yy} = a - x - y$, cujus partes quadrando ut assymmetria rursus tollatur, prodit $xx - yy = aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy$, quæ in ordinem redacta & per 2 divisa fit $yy = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$. Denique ponendo æqualitatem inter duos valores ipsius yy, habeo $ay - xy - 2bb = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$, quæ reducta fit $\frac{1}{2}a - \frac{2bb}{a} = x$.

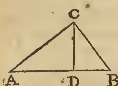
Idem aliter.

Esto $\frac{1}{2}$ perimeter $= a$, area $= bb$, & $BC = x$, eritque $AC + AB = 2a - x$. Jam cum sit xx (BCq)

$(BCq) = ACq + ABq$, & $4bb = 2\,AC \times AB$, erit $xx + 4bb = ACq + ABq + 2\,AC \times AB =$ quadrato ex $AC + AB =$ quadrato ex $2a - x = 4aa - 4ax + xx$. Hoc est $xx + 4bb = 4aa - 4ax + xx$; quæ reducta fit $a - \frac{bb}{a} = x$.

PROB. IV.

Dato trianguli rectanguli perimetro & perpendiculo, invenire triangulum.



Trianguli ABC sit C rectus angulus & CD perpendiculum inde ad basem AB demissum. Detur $AB + BC + AC = a$, & $CD = b$. Pone basem $AB = x$, & erit laterum summa $a - x$. Pone laterum differentiam y, & erit majus latus $AC = \frac{a - x + y}{2}$; minus $BC = \frac{a - x - y}{2}$. Jam ex natura trianguli rectanguli est $ACq + BCq = ABq$, hoc est $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = xx$. Est & $AB.\ AC ::$ $BC.\ DC$, adeoque $AB \times DC = AC \times BC$, hoc est $bx = \frac{aa - 2ax + xx - yy}{4}$. Per priorem æquationem est $yy = xx + 2ax - aa$. Per posteriorem $yy = xx - 2ax + aa - 4bx$. Adeoque $xx + 2ax - aa = xx - 2ax + aa - 4bx$. Et per reductionem $4ax + 4bx = 2aa$, sive $x = \frac{aa}{2a + 2b}$.

Geome-

Geometrice sic. In omni triangulo rectangulo, ut est summa perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita dimidium perimetri ad basem.

Aufer $2x$ de a, & restabit $\frac{ab}{a+b}$ excessus laterum super basem. Unde rursus, Ut in omni triangulo rectangulo, summa perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita perpendiculum ad excessum laterum super basem.

PROB. V.

Datis trianguli rectanguli basi AB, & summa perpendiculi & laterum $CA+CB+CD$, invenire triangulum.

Esto $CA+CB+CD=a$, $AB=b$, $CD=x$, & erit $AC+CB=a-x$. Pone $AC-CB=y$, & erit $AC=\frac{a-x+y}{2}$, & $CB=\frac{a-x-y}{2}$. Est autem $ACq+CBq=ABq$, hoc est $\frac{aa-2ax+xx+yy}{2}=bb$. Est & $AC\times CB=AB\times CD$, hoc est $\frac{aa-2ax+xx-yy}{4}=bx$. Quibus comparatis fit $2bb-aa+2ax-xx=yy=aa-2ax+xx-4bx$. Et per reductionem $xx=2ax+2bx-aa+bb$, & $x=a+b-\sqrt{2ab+2bb}$.

Geometrice sic. In omni triangulo rectangulo de summa perimetri & perpendiculi aufer mediam proportionalem inter eandem summam & duplum basis, & restabit perpendiculum.

Idem

Idem aliter.

Sit $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, & $AC = x$; & erit $BC = \sqrt{bb - xx}$, $CD = \frac{x\sqrt{bb - xx}}{b}$. Et $x + CB + CD = a$, ſive $CB + CD = a - x$, atque adeo $\frac{b + x}{b}\sqrt{bb - xx} = a - x$. Et quadratis partibus atque multiplicatis per bb, fiet $-x^4 - 2bx^3 + 2b^3x + b^4 = aabb - 2abbx + bbxx$. Qua æquatione per tranſpoſitionem partium ad hunc modum ordinata $x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} +3bb \\ +2ab \end{matrix} xx \begin{matrix} +2b^3 \\ +2abb \end{matrix} x \begin{matrix} +b^4 \\ +2ab^3 \\ +aabb \end{matrix} = \begin{matrix} 2bb \\ +2ab \end{matrix} xx \begin{matrix} +4b^3 \\ +4abb \end{matrix} x \begin{matrix} +2b^4 \\ +2ab^3 \end{matrix}$, & extracta utrobique radice, orietur $xx + bx + bb + ab = \overline{x + b}\sqrt{2ab \mp 2bb}$. Et extracta iterum radice $x = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}ab} \pm \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab}$.

Conſtructio Geometrica.



Cape igitur $AB = \frac{1}{2}b$, $BC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}AB$, AE mediam proportionalem inter b & AC, & EF hinc inde mediam proportionalem inter b & DE, & erunt BF, BF duo latera trianguli.

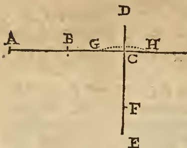
PROB.

PROB. VI.

Datis in triangulo rectangulo ABC summa laterum $AC + BC$, & perpendiculo CD invenire triangulum.

SIT $AC+BC=a$, $CD=b$, $AC=x$, & erit $BC=a-x$, $AB=\sqrt{aa-2ax+2xx}$. Est & CD. AC : : BC. AB. Ergo rursus $AB=\frac{ax-xx}{b}$. Quare $ax-xx=b\sqrt{aa-2ax+2xx}$, & partibus quadratis & ordinatis $x^4-2ax^3 \begin{smallmatrix}+aa\\-2bb\end{smallmatrix} xx + 2abbx - aabb = 0$. Adde ad utramque partem $aabb+b^4$, & fiet $x^4-2ax^3 \begin{smallmatrix}+aa\\-2bb\end{smallmatrix} xx + 2abbx + b^4 = aabb + b^4$. Et extracta utrobique radice $xx-ax-bb=-bx\sqrt{aa+bb}$, & radice iterum extracta $x=\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb-b\sqrt{aa+bb}}$.

Constructio Geometrica.

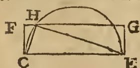


Cape $AB = BC = \frac{1}{2}a$. Ad C erige perpendiculum CD $= b$. Produc DC ad E ut sit DE $=$ DA. Et inter CD & CE cape medium proportionale CF. Centroque F, radio BC descriptus circulus GH secet rectam BC in G & H, & erunt BG & BH latera duo trianguli.

Idem

Idem aliter.

Sit $AC + BC = a$, $AC - BC = y$, $AB = x$; ac $DC = b$, & erit $\frac{a+y}{2} = AC$, $\frac{a-y}{2} = BC$, $\frac{aa+yy}{2} = ACq + BCq = ABq = xx$. $\frac{aa-yy}{4b} = \frac{AC \times BC}{DC} = AB = x$. Ergo $2xx - aa = yy = aa - 4bx$, & $xx = aa - 2bx$, & extracta radice $x = -b + \sqrt{bb + aa}$. Unde in superiori constructione est CE Hypotenusa trianguli quæsiti.



Data autem basi & perpendiculo tam in hoc quam in superiore Problemate, triangulum sic expedite construitur. Fac parallelogrammum CG cujus latus CE erit basis trianguli, latus alterum CF perpendiculum. Et super CE describe semicirculum secantem latus oppositum FG in H. Age CH, EH, & erit CHE triangulum quæsitum.

PROB. VII.

In triangulo rectangulo, datis summa laterum, & summa perpendiculi & basis invenire Triangulum.

SIT laterum AC & BC summa a, basis AB & perpendiculi CD summa b, latus $AC = x$, basis $AB = y$, & erit $BC = a - x$, $CD = b - y$, $aa - 2ax + 2xx = ACq + BCq = ABq = yy$, $ax - xx = AC \times BC = AB \times CD = by - yy = by - aa + 2ax - 2xx$, & $by = aa - ax + xx$.

$+xx$. Hujus quadratum $a^4 - 2a^3x + 3aax\bar{x} - 2ax^3 + x^4$, pone æquale yy in bb, hoc est æquale $aabb - 2abbx + 2bbxx$. Et ordinata æquatione fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +3aa \\ -2bb \end{matrix} xx \begin{matrix} -2a^3 \\ +2abb \end{matrix} x \begin{matrix} +a^4 \\ -aabb \end{matrix} = 0$. Ad utramque partem æquationis adde $b^4 - aabb$, & fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +3aa \\ -2bb \end{matrix} xx \begin{matrix} -2a^3 \\ +2abb \end{matrix} x \begin{matrix} +a^4 \\ -2aabb \\ +b^4 \end{matrix} = b^4 - aabb$. Et extracta utrobique radice $xx - ax + aa - bb = -b\sqrt{bb - aa}$. & radice iterum extracta

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{bb - \tfrac{3}{4}aa - b\sqrt{bb - aa}}.$$

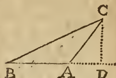
Constructio Geometrica.

Cape R mediam proportionalem inter $b + a$ & $b - a$, & S mediam proportionalem inter R & $b - \text{R}$, & T mediam proportionalem inter $\tfrac{1}{2}a + \text{S}$ & $\tfrac{1}{2}a - \text{S}$, & erunt $\tfrac{1}{2}a + \text{T}$ & $\tfrac{1}{2}a - \text{T}$, latera trianguli.

PROB. VIII.

Trianguli cujuscunque ABC, datis areā, perimetro, & uno angulorum A, cætera determinare.

ESTO perimeter $= a$, & area $= bb$, & ab ignotorum angulorum alterutro C ad latus oppositum AB demitte perpendiculum CD; & propter angulum A datum, erit AC



ad

ad CD in data ratione, puta d ad e. Dic ergo AC $= x$ & erit CD $= \frac{ex}{d}$, per quam divide duplam aream, & prodibit $\frac{2bbd}{ex} =$ AB. Adde AD (nempe $\sqrt{ACq - CDq}$, five $\frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$) & emerget BD $= \frac{2bbd}{ex} + \frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$; cujus quadrato adde CD$q$ & orietur $\frac{4b^4dd}{eexx} + xx + \frac{4bb}{e} \times \sqrt{dd - ee} =$ BCq. Adhæc à perimetro aufer AC & AB, & reftabit $a - x - \frac{2bbd}{ex} =$ BC, cujus quadratum $aa - 2ax + xx - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e} + \frac{4b^4dd}{eexx}$ pone æquale quadrato prius invento; &, neglectis æquipollentibus, erit $\frac{4bb}{e}\sqrt{dd - ee} = aa - 2ax - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e}$. Et hæc, affumendo $4af$ pro datis terminis $aa + \frac{4bbd}{e} - \frac{4bb}{e} \times \sqrt{dd - ee}$, & reducendo, evadit $xx = 2fx - \frac{2bbd}{e}$, five $x = f \pm \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$.

Eadem æquatio prodiiffet etiam quærendo crus AB; nam crura AB & AC fimiliter fe habent ad omnes conditiones problematis. Quare fi AC ponatur $f - \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$ erit AB $= f + \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$,

& vicissim; atque horum summa $2f$ subducta de perimetro relinquit tertium latus $BC = a - 2f$.

PROB. IX.

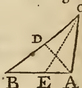
Datis altitudine, basi, & summa laterum invenire triangulum.

SIT altitudo $CD = a$, basis AB dimidium $= b$, laterum semisumma $= c$, & semidifferentia $= z$; eritque majus latus, puta $BC = c + z$, & minus $AC = c - z$. Subduc CDq de BCq & ACq, & exibit hinc $BD = \sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$, & inde $AD = \sqrt{cc - 2cz + zz - aa}$. Subduc etiam AB de BD & exibit iterum $AD = \sqrt{cc + 2cz + zz - aa} - 2b$. Quadratis jam valoribus AD & ordinatis terminis, orietur $bb + cz = b\sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$. Rursusque quadrando & redigendo in ordinem obtinebitur $cczz - bbzz = bbcc - bbaa - b^4$. Et $z = b\sqrt{1 - \frac{aa}{cc - bb}}$. Unde dantur latera.

PROB. X.

Datis basi AB, summa laterum $AC + BC$, & angulo verticali C, determinare latera.

SIT basis $= a$, semisumma laterum $= b$, & semidifferentia $= x$, eritque majus latus $BC = b + x$ & minus $AC = b - x$. Ab alterutro ignotorum angulorum A ad latus oppositum BC demitte perpendiculum AD & propter angulum C datum dabitur ratio AC ad CD puta d ad e, & proinde erit $CD = \frac{eb - ex}{d}$.



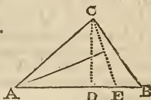
Est

Eſt etiam per 13.II.Elementorum $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC}$ hoc eſt $\frac{2bb + 2xx - aa}{2b + 2x} = CD$; adeoque habetur æquatio inter valores CD. Et hæc reducta fit $x = \sqrt{\frac{daa + 2ebb - 2dbb}{2d + 2e}}$. Unde dantur latera.

Si anguli ad baſin quærerentur, concluſio foret concinnior; utpote ducatur EC datum angulum biſecans & baſi occurrens in E; & erit AB. AC + BC (:: AE. AC) :: ſin. ang. ACE. ſin. ang. AEC. Et ab angulo AEC ejuſque complemento BEC ſi ſubducatur dimidium anguli C relinquentur anguli ABC & BAC.

PROB. XI.

Datis Triangali lateribus invenire angulos.



Dentur latera AB $= a$, AC $= b$, BC $= c$, quæratur angulus A. Demiſſo ad AB perpendiculo CD quod angulo iſti opponitur, erit imprimis $bb - cc = ACq - BCq = ADq - BDq = \overline{AD + BD} \times \overline{AD - BD} = AB \times \overline{2AD - AB} = 2AD \times a - aa$. Adeoque $\frac{1}{2}a + \frac{bb - cc}{2a} = AD$. Unde prodit hocce *primum Theorema*.

I. Ut AB, ad AC + BC, ita AC − BC, ad quartam proportionalem N. $\frac{AB + N}{2} = AD$. Ut AC ad AD, ita radius ad Coſinum anguli A.

Adhæc $DCq = ACq - ADq$

$$= \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}{4aa}$$

$$= \frac{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}}{4aa}$$

Unde multiplicatis numeratoris & denominatoris radicibus per b, conflatur hocce *Theorema secundum.*

II. Ut $2ab$ ad medium proportionale inter $\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c}$, & $\overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}$, ita radius ad sinum anguli A.

Insuper in AB Cape $AE = AC$, & Age CE, & erit angulus ECD æqualis dimidio anguli A. Aufer AD de AE, & restabit $DE = b - \frac{1}{2}a$ $- \frac{bb-cc}{2a} = \frac{cc-aa+2ab-bb}{2a} = \frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}}{2a}$.

Unde $DEq = \frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b} \times \overline{c-a+b}}{4aa}$.

Et hinc consit *Theorema tertium quartumque*, *viz.*

III. Ut $2ab$ ad $\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}$ (ita AC ad DE) ita radius ad sinum versum anguli A.

IV. Et, ut medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$ (ita CD ad DE) ita radius ad tangentem dimidii anguli A, vel dimidii cotangens ad radium.

Præterea est $CEq = CDq + DEq$

$$= \frac{2abb + bcc - baa - b^3}{a} = \frac{b}{a} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}.$$

Unde *Theorema quintum & sextum.*

V. Ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$, vel ut 1 ad medi. proportionale inter $\frac{c+a-b}{2a}$, & $\frac{c-a+b}{2b}$ (ita AC ad $\frac{1}{2}$CE vel CE ad DE) ita radius ad sinum dimidii anguli A.

VI.

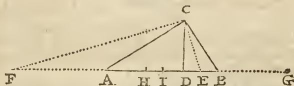
VI. Et ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ (ita CE ad CD) ita radius ad cosinum dimidii anguli A.

Si præter angulos desideretur etiam area trianguli, duc CDq in $\frac{1}{4}ABq$, & radix *viz.* $\frac{1}{4}\sqrt{\overline{a+b+c}\times\overline{a+b-c}\times\overline{a-b+c}\times\overline{-a+b+c}}$, erit area illa quæsita.

PROB. XII.

Trianguli cujusvis rectilinei datis lateribus & basi, invenire segmenta basis, perpendiculum, aream & angulos.

TRianguli ABC dentur latera AC, BC & basis AB. Biseca AB in I & in ea utrinque producta cape AF & AE æquales AC, atque BG &



BH æquales BC. Junge CE, CF; & à C ad basem demitte perpendiculum CD. Et erit $ACq-BCq = ADq+CDq-CDq-BDq = ADq-BDq = \overline{AD+BD}\times\overline{AD-BD} = AB\times 2DI$. Ergo $\frac{ACq-BCq}{2AB} = DI$. Et $2AB.\ AC+BC::AC-BC.\ DI$. Quod est Theorema pro determinandis segmentis basis.

De IE, hoc est de $AC-\frac{1}{2}AB$ aufer DI, &

I 2 resta-

restabit $DE = \frac{BCq - ACq + 2AC \times AB - ABq}{2AB}$,
hoc est $= \frac{\overline{BC + AC - AB} \times \overline{BC - AC + AB}}{2AB}$,
sive $= \frac{HE \times EG}{2AB}$. Aufer DE de FE sive 2AC, & restabit $FD = \frac{ACq + 2AC \times AB + ABq - BCq}{2AB}$,
hoc est $= \frac{\overline{AC + AB + BC} \times \overline{AC + AB - BC}}{2AB}$,
sive $= \frac{FG \times FH}{2AB}$. Et cum sit CD medium proportionale inter DE ac DF, CE medium proportionale inter DE & EF, ac CF medium proportionale inter DF & EF: erit $CD = \frac{\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}}{2AB}$, $CE = \sqrt{\frac{AC \times HE \times EG}{AB}}$, & $CF = \sqrt{\frac{AC \times FG \times FH}{AB}}$. Duc CD in $\frac{1}{2}AB$ & habebitur area $= \frac{1}{4}\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$. Pro angulo vero A determinando prodeunt Theoremata multiplicia, *viz.*

1. $2AB \times AC : HE \times EG$ (:: AC. DE) :: radius ad sinum versum anguli A.

2. $2AB \times AC$. $FG \times FH$ (:: AC. FD) :: radius ad cosin. vers. A.

3. $2AB \times AC$. $\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$ (:: AC. CD) :: rad. ad sin. A.

4. $\sqrt{FG \times FH}$. $\sqrt{HE \times EG}$ (:: CF. CE):: rad. ad tang. $\frac{1}{2}$ A.

5. $\sqrt{HE \times EG}$. $\sqrt{FG \times FH}$ (:: CE. FC) :: rad. ad cotang. $\frac{1}{2}$ A.

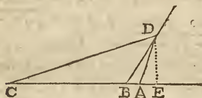
6.

6. $2\sqrt{AB \times AC}$. $\sqrt{HE \times EG}$ (:: FE. CE) :: rad. ad sin. $\frac{1}{2}$ A.

7. $2\sqrt{AB \times AC}$. $\sqrt{FG \times FH}$ (:: FE. FC) :: rad. ad cosin. $\frac{1}{2}$ A.

PROB. XIII.

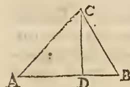
Datum angulum C B D recta data C D subtendere; ita ut si à termino istius rectæ D ad punctum A in recta C B producta datum agatur A D, fuerit angulus A D C æqualis angulo A B D.



Dicatur $CD = a$, $AB = b$, $BD = x$, & erit BD. BA :: CD. $DA = \frac{ab}{x}$. Demitte perpendiculum DE, Erit $BE = \frac{BDq - ADq + BAq}{2BA}$ $= \frac{xx - \frac{aabb}{xx} + bb}{2b}$. Ob datum angulum DBA pone BD. BE :: b. e, & habebitur iterum $BE = \frac{ex}{b}$, ergo $xx - \frac{aabb}{xx} + bb = 2ex$. Et $x^4 - 2ex^3 + bbxx - aabb = 0$.

PROB. XIV.

Invenire Triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC & perpendiculum DC, sunt in Arithmetica progressione.



Dic $AC = a$, $BC = x$; & erunt $DC = 2x - a$, & $AB = 2a - x$. Erunt etiam $AD (= \sqrt{ACq - DCq}) = \sqrt{4ax - 4xx}$ & $BD (= \sqrt{BCq - DCq}) = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Atque adeo rursus $AB = \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Quare $2a - x = \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$, sive $2a - x - \sqrt{4ax - 4xx} = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Et partibus quadratis $4aa - 3xx - \overline{4a + 2x} \times \sqrt{4ax - 4xx} = 4ax - 3xx - aa$, sive $5aa - 4ax = \overline{4a - 2x}\sqrt{4ax - 4xx}$. Et partibus iterum quadratis ac terminis rite dispositis $16x^4 - 80ax^3 + 144aaxx - 104a^3x + 25a^4 = 0$. Hanc æquationem divide per $2x - a$, & orietur $8x^3 - 36axx + 54aax - 25a^3 = 0$, æquatio cujus resolutione dabitur x ex assumpto utcunque a. Habitis a & x constitue triangulum cujus latera erunt $2a - x$, a, & x; & perpendiculum in latus $2a - x$ demissum erit $2x - a$.

Si posuissem differentiam laterum trianguli esse d, & perpendiculum esse x; opus evasisset aliquanto concinnius, prodeunte tandem æquatione $x^3 = 24ddx + 48d^3$.

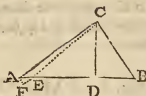
PROB.

PROB. XV.

Invenire Triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC, & perpendiculum CD, sunt in Geometrica progressione.

DIC $AC = x$, & $BC = a$; & erit $AB = \frac{xx}{a}$. Et $CD = \frac{aa}{x}$. Eft & AD $(= \sqrt{ACq - CDq})$ $= \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$; & BD $(= \sqrt{BCq - DCq})$ $= \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$; adeoque $\frac{xx}{a}$ $(= AB) = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}} + \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$, five $\frac{xx}{a} - \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$. Et partibus æquationis quadratis, $\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a} \times \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} + aa - \frac{a^4}{xx} = xx - \frac{a^4}{xx}$, hoc eft $x^4 - aaxx + a^4 = 2aax\sqrt{xx - aa}$. Et partibus iterum quadratis $x^8 - 2aax^6 + 3a^4x^4 - 2a^6xx + a^8 = 4a^4x^4 - 4a^6xx$. Hoc eft $x^8 - 2aax^6 - a^4x^4 + 2a^6xx + a^8 = 0$. Divide hanc æquationem per $x^4 - aaxx - a^4$, & orietur $x^4 - aaxx - a^4$. Quare eft $x^4 = aaxx + a^4$. Et extracta radice $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{5}{4}a^4}$, five $x = a\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$. Cape ergo a five BC cujufvis longitudinis, & fac BC. AC :: AC. AB :: 1. $\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$; & trianguli ABC ex his lateribus conftituti perpendiculum DC erit ad latus BC in eadem ratione.

Idem aliter.

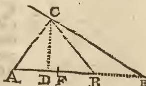


Cum sit AB. AC :: BC. DC dico angulum ACB rectum esse. Nam si negas age CE constituentem angulum ECB rectum. Sunt ergo triangula BCE, DBC similia per 8. VI. Elem. adeoque EB. EC :: BC. DC. hoc est EB. EC :: AB. AC. Age AF perpendicularem CE & propter parallelas AF, BC, erit EB. EC :: AE. FE :: AB. FC. Ergo per 9. V. Elem. est AC = FC, hoc est Hypotenusa trianguli rectanguli æqualis lateri contra 19. I. Elem. Non est ergo angulus ECB rectus, & proinde ipsum ACB rectum esse oportet. Est itaque $ACq + BCq = ABq$. Sed est $ACq = AB \times BC$, ergo $AB \times BC + BCq = ABq$, & extracta radice $AB = \frac{1}{2}BC + \sqrt{\frac{5}{4}BCq}$. Quamobrem cape $BC. AB :: 1. \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, & AC mediam proportionalem inter BC & AB, & triangulo ex his lateribus constituto, erunt AB. AC. BC. DC continue proportionales.

PROB.

PROB. XVI.

Super data basi AB triangulum ABC constituere, cujus vertex C erit ad rectum EC positione datam, basis autem medium existet Arithmeticum inter latera.



Basis AB bisecetur in F, & producatur donec rectæ EC positione datæ occurrat in E, & ad ipsam demittatur perpendicularis CD; dictisque $AB = a$, $FE = b$, & $BC - AB = x$, erit $BC = a + x$, $AC = a - x$. Et per 13. II. Elem. BD $\left(= \frac{BCq - ACq + ABq}{2AB}\right) = 2x + \frac{1}{2}a$. Adeoque $FD = 2x$, $DE = b + 2x$, & $CD \left(= \sqrt{CBq - BDq}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Sed propter datas positiones rectarum CE & AB, datur angulus CED; adeoque & ratio DE ad CD; quæ si ponatur d ad e dabit analogiam $d.\ e :: b + 2x.\ \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Unde, multiplicatis extremis & mediis in se, oritur æquatio $eb + 2ex = d\sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$, cujus partibus quadratis & rite dispositis, fit $xx = \frac{\frac{3}{4}ddaa - eebb - 4eebx}{4ee + 3dd}$. Et radice extracta

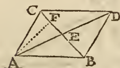
$$x = \frac{-2eeb + d\sqrt{3eeaa - 3eebb + \frac{9}{4}ddaa}}{4ee + 3dd}.$$

Dato autem x, datur $BC = a + x$ & $AC = a - x$.

PROB.

PROB. XVII.

Datis Parallelogrammi cujuscunque lateribus AB, BD, DC & AC, & una linea diagonali BC, invenire alteram diagonalem AD.

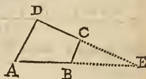


SIT E concursus diagonalium, & ad diagonalem BC demitte normalem AF, & per 13. II. Elementorum erit $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = CF$, atque etiam $\frac{ACq - AEq + ECq}{2EC} = CF$. Quare cum sit $EC = \frac{1}{2}BC$, & $AE = \frac{1}{2}AD$, erit $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = \frac{ACq - \frac{1}{4}ADq + \frac{1}{4}BCq}{BC}$, & facta reductione $AD = \sqrt{2ACq + 2ABq - BCq}$.

Unde obiter in quolibet parallelogrammo, summa quadratorum laterum æquatur summæ quadratorum diagonalium.

PROB. XVIII.

Datis Trapezii ABCD angulis, perimetro, & area, determinare latera.



LAtera duo quælibet AB ac DC produc donec concurrant in E, sitque $AB = x$ & $BC = y$ & propter angulos omnes datos dantur rationes BC ad

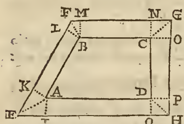
ad CE & BE; quas pone d ad e & f; & erit $CE = \frac{ey}{d}$ & $BE = \frac{fy}{d}$ adeoque $AE = x + \frac{fy}{d}$. Dantur etiam rationes AE ad AD ac DE; quas pone g & h ad d; & erit $AD = \frac{dx + fy}{g}$ & $ED = \frac{dx + fy}{h}$, adeoque $CD = \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$, & ſumma omnium laterum $x + y + \frac{dx + fy}{g} + \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$; quæ, cum detur, eſto a, & abbrevientur etiam termini ſcribendo $\frac{p}{r}$ pro dato $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{h}$, & $\frac{q}{r}$ pro dato $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h} - \frac{e}{d}$, & habebitur æquatio $\frac{px + qy}{r} = a$.

Adhæc propter datos omnes angulos datur ratio BCq ad triangulum BCE, quam pone m ad n & erit triang. $BCE = \frac{n}{m} yy$. Datur etiam ratio AEq ad triangulum ADE; quam pone m ad d; & erit triang. $ADE = \frac{ddxx + 2dfxy + ffyy}{dm}$. Quare cum area AC, quæ eſt horum triangulorum differentia, detur, eſto bb & erit $\frac{ddxx + 2dfxy + ffyy - dnyy}{dm} = bb$. Atque ita habentur duæ æquationes ex quarum reductione omnia determinantur. Nempe ſuperior æquatio dat $\frac{ra - qy}{p} = x$, ſcribendo $\frac{ra - qy}{p}$ pro x in inferiori, provenit $\frac{drraa - 2dqray + dqqyy}{ppm} + \frac{2afry - 2fqyy}{pm} + \frac{ffyy - dnyy}{dm} = bb$. Et abbreviatis

tis terminis scribendo s pro dato $\frac{dqq}{pp} - \frac{2fq}{p} - \frac{ff}{d} - n$, & st pro dato $+ \frac{adqr}{pp} - \frac{afr}{p}$, ac stv pro dato $bbm - \frac{drraa}{pp}$, oritur $yy = 2ty + tv$ seu $y = t + \sqrt{tt + tv}$.

PROB. XIX.

Piscinam ABCD perambulatorio ABCD EFGH datæ areæ, & ejusdem ubique latitudinis circundare.



Esto perambulatorii latitudo x & ejus area aa. Et à punctis A, B, C, D, ad lineas EF, FG, GH & HE demissis perpendicularibus AK, BL, BM, CN, CO, DP, DQ, AI, perambulatorium dividetur in quatuor trapezia IK, LM, NO, PQ & in quatuor parallelogramma AL, BN, CP, DI, latitudinis x, & ejusdem longitudinis cum lateribus dati trapezii. Sit ergo summa laterum $(AB + BC + CD + DA) = b$, & erit summa parallelogrammorum $= bx$.

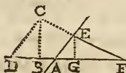
Porro ductis AE, BF, CG, DH; cum sit AI = AK erit ang. AEI = ang. AEK = $\frac{1}{2}$ IEK sive $\frac{1}{2}$ DAB. Datur ergo ang. AEI & proinde ratio ipsius AI ad IE, quam pone d ad e; & erit IE $= \frac{ex}{d}$. Hanc duc in $\frac{1}{2}$ AI sive $\frac{1}{2}x$ & fiet area trianguli

anguli AEI $= \frac{exx}{2d}$. Sed propter æquales angulos & latera, triangula AEI & AEK ſunt æqualia, adeoque trapezium IK ($=$ 2 triang. AEI) $= \frac{exx}{d}$. Simili modo ponendo BL. LF $:: d. f$, & CN. NG $:: d. g$, & DP. PH $:: d. h$, (nam illæ etiam rationes dantur ex datis angulis B, C, ac D) habebitur trapezium LM $= \frac{fxx}{d}$, NO $= \frac{gxx}{d}$, & PQ $= \frac{hxx}{d}$. Quamobrem $\frac{exx}{d} + \frac{fxx}{d} + \frac{gxx}{d} + \frac{hxx}{d}$ ſive $\frac{pxx}{d}$ ſcribendo p pro $e + f + g + h$, erit æquale trapeziis quatuor IK + LM + NO + PQ; & proinde $\frac{pxx}{d} + bx$, æquabitur toti perambulatorio aa. Quæ æquatio dividendo omnes terminos per $\frac{p}{d}$ & extrahendo radicem ejus, evadet $x = \frac{-db + \sqrt{bbdd + 4aapd}}{2p}$. Latitudine Perambulatorii ſic inventa facile eſt ipſum deſcribere.

PROB.

PROB. XX.

A dato puncto C rectam lineam CF ducere quæ cum aliis duabus positione datis rectis AE & AF triangulum datæ magnitudinis AEF comprehendet



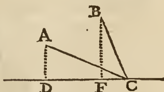
Age CD parallelam AE, & CB ac EG perpendiculares in AF, sitque $AD = a$, $CB = b$, $AF = x$, & trianguli AEF area cc, & propter proportionales DF. AF (:: DC. AE) :: CB. EG, hoc est $a + x. x :: b. \frac{bx}{a+x}$ erit $\frac{bx}{a+x} = EG$. Hanc duc in $\frac{1}{2}AF$, & emerget $\frac{bxx}{2a+2x}$ quantitas areæ AEF quæ proinde æquatur cc. Atque adeo æquatione ordinata est $xx = \frac{2ccx + 2cca}{b}$ seu $x = \frac{cc + \sqrt{c^4 + 2ccab}}{b}$.

Nihil secus recta per datum punctum ducitur quæ triangulum vel trapezium quodvis in data ratione secabit.

PROB.

PROB. XXI.

Punctum C in data recta linea DF determinare, à quo ad alia duo positione data puncta A & B ductæ rectæ AC & BC datam habeant differentiam. Vide Prop. 45.



A Datis punctis ad datam rectam demitte perpendiculares AD & BF, & dic $AD = a$, $BF = b$, $DF = c$, $DC = x$, & erit $AC = \sqrt{aa + xx}$, $FC = x - c$, & $BC = \sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$. Sit jam data harum differentia d, existente AC majori quam BC erit $\sqrt{aa + xx} - d = \sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$. Et quadratis partibus $aa + xx + dd - 2d\sqrt{aa + xx} = bb + xx - 2cx + cc$. Factaque reductione & abbreviandi causa pro datis $aa + dd - bb - cc$ scripto $2ee$, emerget $ee + cx = d\sqrt{aa + xx}$. Iterumque quadratis partibus $e^4 + 2ceex + ccxx = ddaa + ddxx$.

Et æquatione reducta $xx = \frac{2eecx + e^4 - aadd}{dd - cc}$,

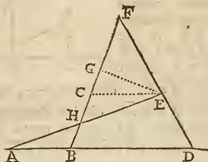
seu $x = \frac{eec + \sqrt{e^4dd - aad^4 + aaddcc}}{dd - cc}$.

Haud secus problema resolvitur si linearum AC & BC summa vel quadratorum summa aut differentia, vel proportio vel rectangulum vel angulus ab ipsis comprehensus detur; vel etiam si vice rectæ DC, circumferentia circuli, aut alia quævis curva linea adhibeatur, modo calculus (in hoc ultimo præsertim casu) referatur ad lineam conjungentem puncta A & B.

PROB.

PROB. XXII.

Datis positione tribus rectis AD, AE, BF, quartam DF ducere, cujus partes DE EF prioribus interceptæ, datarum erunt longitudinum.



AD BF demitte perpendicularem EG, ut & obliquam EC parallelam AD, & rectis tribus positione datis concurrentibus in A, B, & H, dic $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$, $ED = d$, $EF = e$, & $HE = x$. Jam propter similia triangula ABH, ECH, est AH. AB :: HE. $EC = \frac{ax}{c}$, & AH. HB :: HE. $CH = \frac{bx}{c}$. Adde HB, & fit CB $= \frac{bx + bc}{c}$. Insuper propter similia triangula FEC, FDB, est ED. CB :: EF. $CF = \frac{ebx + ebc}{dc}$. Denique per 12 & 13. II. Elem. est $\frac{ECq - EFq}{2FC}$ $+ \frac{1}{2}FC$

$+\frac{1}{2}FC(=CG)=\frac{HEq-ECq}{2CH}-\frac{1}{2}CH$, hoc est

$$\frac{\frac{\frac{aaxx}{cc}-ee}{\frac{2ebx+2ebc}{dc}}}{}+\frac{ebx+ebc}{2dc}=\frac{xx-\frac{aaxx}{cc}}{\frac{2bx}{c}}-\frac{bx}{2c}.$$ Sive

$$\frac{aadxx-eedcc}{ebx+ebc}+\frac{ebx}{d}+\frac{ebc}{d}=\frac{ccx-aax-bbx}{b}.$$

Hic, abbreviandi causa, pro $\frac{cc-aa-bb}{b}-\frac{eb}{d}$, scribe m; & erit $\frac{aadxx-eedcc}{ebx+ebc}+\frac{ebc}{d}=mx$, ac terminis omnibus multiplicatis per $x+c$, fiet

$$\frac{aadxx-eedcc}{eb}+\frac{ebcx}{d}+\frac{ebcc}{d}=mxx+mcx.$$

Iterum pro $\frac{aad}{eb}-m$, scribe p, pro $mc-\frac{ebc}{d}$ scribe $2pq$, & pro $-\frac{ebcc}{d}+\frac{eedcc}{eb}$ scribe prr, & evadet $xx=2qx+rr$, & $x=q\pm\sqrt{qq+rr}$. Invento x sive HE, age EC parallelam AB, & Cape FC. BC :: e. d, & acta FED conditionibus quæstionis satisfaciet.

PROB. XXIII.

Punctum Z determinare à quo ad quatuor positione datas rectas lineas F A, E B, F C, G D, si aliæ quatuor lineæ Z A, Z B, Z C, & Z D in datis angulis ducantur, duarum è ductis Z A & Z B rectangulum & aliarum duarum Z C & Z D summa detur.

E Lineis elige aliquam positione datam F A ut & positione non datam Z A quæ ad illam ducitur, ex quarum longitudinibus punctum Z determinetur, & cæteras positione datas lineas produc donec his, si opus est etiam productis, occurrant, ut vides. Dictisque $EA = x$, & $AZ = y$, propter angulos trianguli A E H datos dabitur ratio A E ad A H quam pone p ad q, & erit $AH = \frac{qx}{p}$. Adde A Z, fitque $ZH = y + \frac{qx}{p}$. Et inde cum propter datos angulos trianguli H Z B detur ratio H Z ad B Z si ea ponatur n ad p habebitur $ZB = \frac{py + qx}{n}$.

Præte-

Præterea si data E F dicatur a, erit A F $= a - x$, indeque, si propter datos angulos trianguli A F I statuatur A F ad A I in ratione p ad r, evadet A I $= \frac{ra - rx}{p}$. Hanc aufer ab A Z & restabit I Z $= y - \frac{ra - rx}{p}$. Et propter datos angulos trianguli I C Z, si ponatur I Z ad Z C in ratione m ad p, evadet Z C $= \frac{py - ra + rx}{m}$.

Ad eundem modum si ponatur E G $= b$. A G. A K :: $l : s$ & Z K. Z D :: . p. l. obtinebitur Z D $= \frac{sb - sx - ly}{p}$.

Jam ex statu quæstionis si duarum Z C & Z D summa $\frac{py - ra + rx}{m} + \frac{sb - sx - ly}{p}$ ponatur æqualis dato alicui f; & aliarum duarum rectangulum $\frac{pyy + qxy}{n}$ æquale gg, habebuntur duæ æquationes pro determinandis x & y. Per posteriorem fit $x = \frac{ngg - pyy}{qy}$. & hunc ipsius x valorem scribendo pro eo in priori æquatione, evadet $\frac{py - ra}{m} + \frac{rngg - rpyy}{mqy} + \frac{sb - ly}{p} - \frac{sngg - spyy}{pqy} = f$. Et reducendo $yy = \frac{apqry - bmqsy + fmpqy + ggmns - ggnpr}{ppq - ppr - mlq + mps}$. Et abbrevi. causa scripto $2h$ pro $\frac{apqr - bmqs + fmpq}{ppq - ppr - mlq + mps}$, & kk pro $\frac{ggmns - ggpnr}{ppq - ppr - mlq + mps}$ fiet $yy = 2hy$

K 2 $+ kk$

$+ kk$, five $y = h \pm \sqrt{hh + kk}$. Cujus æquationis ope cum y innotefcit, æquatio $\frac{ngg - pyy}{qy} = x$ dabit x. Quod fufficit ad determinandum punctum z.

Ad eundem fere modum punctum determinatur à quo ad plures vel pauciores pofitione datas rectas totidem aliæ rectæ ducantur ea lege ut aliquarum fumma vel differentia vel contentum detur, aut æquetur cæterarum fummæ vel differentiæ vel contento, vel ut alias quaflibet habeant affignatas conditiones.

PROB. XXIV.

Angulum rectum EAF data recta EF fubtendere, quæ tranfibit per datum punctum C, a lineis rectum angulum comprehendentibus æquidiftans.

H K B A F E G C D

QUadratum ABCD compleatur, & linea EF bifcetur in G. Tum dic CB vel CD effe a, EG vel FG effe b, & CG effe x; eritque $CE = x - b$, & $CF = x + b$. Dein cum $CFq - BCq = BFq$, erit $BF = \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Denique

nique propter similia triangula CDE, FBC, est CE. CD :: CF. BF, sive $x - b. \ a :: x + b. \ \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Unde $ax + ab = \overline{x - b} \times \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Cujus æquationis utraque parte quadrata, & prodeuntibus terminis in ordinem redactis, prodit $x^4 = \begin{matrix} 2aa \\ + 2bb \end{matrix} xx \begin{matrix} + 2aabb \\ - b^4 \end{matrix}$. Et extracta radice sicut fit in æquationibus quadraticis, prodit $xx = aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}$. Adeoque $x = \sqrt{aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}}$. CG sic inventa dat CE vel CF, quæ determinando punctum E vel F problemati satisfacit.

Idem aliter.

Sit $CE = x$, $CD = a$, & $EF = b$, eritque $CF = x + b$ & $BF = \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Et proinde cum sit CE. CD :: CF. BF, sive $x . a :: x + b. \ \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$, erit $ax + ab = x\sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Hujus æquationis partibus quadratis, & terminis in ordinem redactis prodibit $x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} + bb \\ - 2aa \end{matrix} xx - 2aabx - aabb = 0$, æquatio biquadratica, cujus radicis investigatio difficilior est quam in priori casu. Sic autem investigari potest. Pone $x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} + bb \\ - 2aa \end{matrix} xx - 2aabx + a^4 = aabb + a^4$, & extracta utrobique radice $xx + bx - aa = \pm a\sqrt{aa + bb}$.

Ex his occasionem nactus sum tradendi *Regulam de electione terminorum* ad ineundum calculum.

Scilicet cum duorum terminorum talis obvenit affinitas sive similitudo relationis ad cæteros terminos quæstionis, ut

oporteret æquationes per omnia similes ex utrovis adhibito produci, aut ambos si simul adhiberentur easdem in æquatione finali dimensiones & eandem omnino formam (signis forte + & — exceptis) habituros esse; (id quod facile prospicitur;) tunc neutrum adhibere convenit, sed eorum vice tertium quemvis eligere qui similem utrique relationem gerit, puta semisummam vel semidifferentiam, vel mediūm proportionale forsan, aut quamvis aliam quantitatem utrique indifferenter & sine compare relatam.

Sic in præcedente problemate cum viderim lineam E F pariter ad utramque A B & A D referri (quod patebit si ducas itidem E F in angulo BAH,) atque adeo nulla ratione suaderi possem cur E D potius quam B F, vel A E potius quam A F vel C E potius quam C F pro quærenda quantitate adhiberentur; vice punctorum C & F unde hæc ambiguitas proficiscitur, sumpsi (in solutione priori) intermedium G quod parem relationem ad utramque linearum A B & A D observat. Deinde ab hoc G non demisi perpendiculum ad A F pro quærenda quantitate, quia potui eadem ratione demisisse ad A D. Et eapropter in neutrum C B vel C D demisi, sed institui C G quærendum esse quod nullum admittit compar; & sic æquationem biquadraticam obtinui sine terminis imparibus.

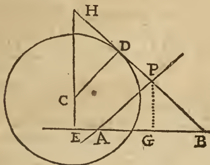
Potui etiam (animadverso quod punctum G jaceat in peripheria circuli centro A, radio E G descripti) demisisse G K perpendiculum in diagonalem A C, & quæsivisse A K vel C K, (quippe quæ similem etiam utrique A B & A D relationem gerunt;) atque ita in æquationem quadraticam $yy = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}bb$ incidissem posito $AK = y$, $AC = e$, & $EG = b$. Et A K sic invento erigendum fuisset perpendiculum K G præfato circulo occurrens in G. per quod C F transiret.

Ad hanc regulam animum advertens, in Prob. 9. & 10. ubi trianguli latera germana B C & A C deter-

determinanda erant, quæſivi potius ſemidifferentiam quam alterutrum eorum. Sed regulæ hujus utilitas è ſequenti Problemate magis eluceſcet.

PROB. XXV.

Ad Circulum centro C radio C D deſcriptum ducere Tangentem D B, cujus pars P B inter rectas poſitione datas A P, A B ſita ſit datæ longitudinis.



A Centro C ad alterutram rectarum poſitione datarum puta A B demitte normalem C E, eamque produc donec Tangenti D B occurrat in H. Ad eandem A B demitte etiam normalem P G. & dictis $EA = a$, $EC = b$, $CD = c$, $BP = d$, & $PG = x$, propter ſimilia triangula P G B, C D H erit $GB (\sqrt{dd - xx}). PB :: CD. CH = \frac{cd}{\sqrt{dd-xx}}$. Adde E C; & fiet $EH = b + \frac{cd}{\sqrt{dd-xx}}$. Porro eſt $PG. GB :: EH. EB = \frac{b}{x}\sqrt{dd-xx} + \frac{cd}{x}$. Adhæc propter angulum P A G datum datur ratio

 PG

PG ad AG, qua posita e ad f erit $AG = \frac{fx}{e}$. Adde EA & BG, & habebitur denuo $EB = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx}$. Est itaque $\frac{cd}{x} + \frac{b}{x}\sqrt{dd - xx} = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx}$, & per transpositionem terminorum $a + \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} = \frac{b - x}{x}\sqrt{dd - xx}$. Et partibus æquationis quadratis $aa + \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} + \frac{ffxx}{ee} - \frac{2cdf}{e} + \frac{ccdd}{xx} = \frac{bbdd}{xx} - bb - \frac{2bdd}{x} + 2bx + dd - xx$. Et per debitam reductionem

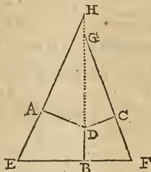
$$\frac{x^4 \begin{array}{l} +2aef \\ -2bee \end{array} x^3 \begin{array}{l} +aaee \\ +bbee \\ -ddee \\ -2cdef \end{array} xx \begin{array}{l} +2bddee \\ -2acdee \end{array} x \begin{array}{l} +ccddee \\ -bbddee \end{array}}{ee+ff} = 0.$$

PROB.

PROB. XXVI.

Invenire punctum D à quo tres rectæ D A, D B, D C ad totidem alias positione datas rectas A E, B F, C F perpendiculariter demissæ; datam inter se rationem obtineat.

E Rectis positione datis producatur una puta B F, ut & ejus perpendicularis B D donec reliquis A E & C F occurrant; B F quidem in E & F; B D autem in H & G. Jam sit $EB = x$ & $EF = a$; eritque $BF = a - x$. Cum autem propter datam positionem rectarum E F, E A, & F C, anguli E & F, adeoque rationes laterum triangulorum EBH & F B G dentur; sit



E B ad B H ut d ad e; & erit $BH = \frac{ex}{d}$, & E H $(= \sqrt{EBq + BHq}) = \sqrt{xx + \frac{eexx}{dd}}$, hoc est $= \frac{x}{d}\sqrt{dd + ee}$. Sit etiam B F ad B G ut d ad f; & erit $BG = \frac{fa - fx}{d}$ & F G $(= \sqrt{BFq + BGq})$ $= \sqrt{aa - 2ax + xx + \frac{ffaa - 2ffax + ffxx}{dd}}$, hoc est $= \frac{a - x}{d}\sqrt{dd + ff}$. Præterea dicatur $BD = y$,

&

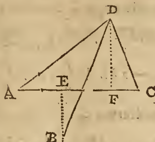
& erit $HD = \frac{ex}{d} - y$, & $GD = \frac{fa - fx}{d} - y$, adeoque cum sit $AD.HD$ (:: $EB.EH$) :: $d. \sqrt{dd+ee}$, & $DC.GD$ (:: $BF.FG$) :: $d.\sqrt{dd+ff}$, erit $AD = \frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, & $DC = \frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$. Denique ob datas rationes linearum BD, AD, DC, sit $BD.\ AD :: \sqrt{dd+ee}.\ h-d$, & erit $\frac{hy-dy}{\sqrt{dd+ee}} (= AD) = \frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, sive $hy = ex$. Sit etiam $BD.\ DC :: \sqrt{dd+ff}.\ k-d$ & erit $\frac{ky-dy}{\sqrt{dd+ff}} (= DC = \frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$, sive $ky = fa - fx$. Est itaque $\frac{ex}{h} (= y) = \frac{fa-fx}{k}$; & per reductionem $\frac{fha}{ek+fh} = x$. Quare cape $EB.EF :: h.\frac{ek}{f} + h$, dein $BD.\ EB :: e.\ h$, & habebitur punctum quæsitum D.

PROB. XXVII.

Invenire punctum D, à quo tres rectæ DA, DB, DC ad data tria puncta A, B, C, ductæ, datam inter se rationem obtineant.

E Datis tribus punctis junge duo quævis puta A & C; & à tertio B ad lineam conjungentem AC demitte perpendiculum BE, ut & perpendiculum DF à puncto quæsito D dictisque $AE=a$, $AC=b$, $EB=c$, $AF=x$, & $FD=y$, erit ADq

$ADq = xx + yy$. $FC = b - x$. CDq ($= FCq + FDq$) $= bb - 2bx + xx + yy$. $EF = x - a$, ac BDq ($= EFq + \overline{EB + FD}$ quad.) $= xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. Jam cum sit AD ad CD in data ratione, sit ista ratio d ad e; & erit $CD = \frac{e}{d}\sqrt{xx + yy}$.



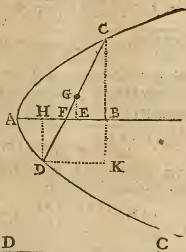
Cum etiam sit AD ad BD in data ratione, sit ista ratio d ad f, & erit $BD = \frac{f}{d}\sqrt{xx + yy}$. Adeoque est $\frac{eexx + eeyy}{dd}$ ($= CDq$) $= bb - 2bx + xx + yy$, & $\frac{ffxx + ffyy}{dd}$ ($= BDq$) $= xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. In quibus si, abbreviandi causa, pro $\frac{dd - ee}{d}$ scribatur p, & q pro $\frac{dd - ff}{d}$, emerget $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, & $aa + cc - 2ax + 2cy + \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy = 0$. Per priorem est $\frac{2bqx - bbq}{p} = \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$. Quare in posteriori pro $\frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$ scribe $\frac{2bqx - bbq}{p}$, & orietur $\frac{2bqx - bbq}{p} + aa + cc - 2ax + 2cy = 0$. Iterum, abbreviandi causa, scribe

scribe m pro $a - \frac{bq}{p}$, & $2cn$ pro $\frac{bbq}{p} - aa - cc$, & erit $2mx + 2cn = 2cy$; terminisque per $2c$ divisis $\frac{mx}{c} + n = y$. Quamobrem in æquatione $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, pro yy scribe quadratum de $\frac{mx}{c} + n$, & habebitur $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{pmm}{dcc}xx + \frac{2pmn}{dc}x + \frac{pnn}{d} = 0$. Ubi denuo si, abbreviandi causa, $\frac{b}{r}$ scribatur pro $\frac{p}{d} + \frac{pmm}{dcc}$, $\frac{sb}{r}$ pro $b - \frac{pmn}{dc}$, & $\frac{tbb}{r}$ pro $bb + \frac{pnn}{d}$, habebitur $xx = 2sx - tb$. Et extracta radice $x = s \pm \sqrt{ss - tb}$. Invento x æquatio $\frac{mx}{c} + n = y$, dabit y; & ex datis x & y, hoc est AF & FD determinatur punctum quæsitum D.

PROB.

PROB. XXVIII.

Rectam DC datæ longitudinis in datam Conicam ſectionem DAC ſic inſcribere ut ea per punctum G poſitione datum tranſeat.



SIT AF axis Curvæ, & à punctis D, G & C ad hunc demitte normales DH, GE, & CB. Jam ad determinandam poſitionem rectæ DC puncti D aut C inventio proponi poteſt; ſed cum hæc ſint germana, & adeo paria ut ad alterutrum determinandum operatio ſimilis evaſura eſſet, ſive quærerem CG, CB, aut AB; ſive comparia DG, DH, aut AH; ea propter de tertio aliquo puncto proſpicio quod utrumque D & C ſimiliter reſpectet, & una determinet. Et hujuſmodi video eſſe punctum F.

Jam ſit $AE = a$, $EG = b$, $DC = c$, $EF = z$; & præterea cum relatio inter AB & BC habeatur in æquatione quam ſuppono pro Conica ſectione determinanda datam eſſe, ſit $AB = x$, & $BC = y$, & erit $FB = x - a + z$. Et propter GE. EF :: CB. FB erit iterum $FB = \frac{yz}{b}$. Ergo $x - a + z = \frac{yz}{b}$.

His

His ita præparatis tolle x per æquationem quæ curvam designat. Quemadmodum si Curva sit Parabola per æquationem $rx = yy$ designata, scribe $\frac{yy}{r}$ pro x; & orietur $\frac{yy}{r} - a + z = \frac{yz}{b}$. Et extracta radice, $y = \frac{rz}{2b} \begin{smallmatrix}+\\-\end{smallmatrix} \sqrt{\frac{rrzz}{4bb} + ar - rz}$. Unde patet $\sqrt{\frac{rrzz}{bb} + 4ar - 4rz}$ esse differentiam gemini valoris y, id est linearum $+$ BC & $-$ DH, adeoque (demisso DK in CB normali) valere CK. Est autem FG. GE :: DC. CK, hoc est $\sqrt{bb + zz}$. $b :: c. \sqrt{\frac{rrzz}{bb} + 4ar - 4rz}$. Ducendoque quadrata extremorum & mediorum in invicem, & facta ordinando orietur

$$z^4 = \frac{4bbrz^3 \begin{smallmatrix}-4abbr\\-bbrr\end{smallmatrix} zz + 4b^4rz \begin{smallmatrix}-4ab^4r\\+b^4cc\end{smallmatrix}}{rr},$$

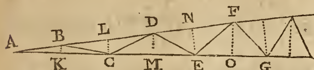
æquatio quatuor tantum dimensionum, quæ ad octo dimensiones ascendisset si quæsivissem CG vel CB aut AB.

PROB. XXIX.

Datum angulum per datum numerum multiplicare vel dividere.

In angulo quovis FAG inscribe lineas AB, BC, CD, DE, *&c.* Ejusdem cujusvis longitudinis, & erunt triangula ABC, BCD, CDE, DEF, *&c.* Isosceli:a; adeoque per 32. I. Elem. erit ang. CBD = ang. A + ACB = 2 ang. A, &

& ang. DCE = ang. A + ADC = 3 ang. A & ang. EDF = A + AED = 4 ang. A, & ang. FEG = 5 ang. A, & sic deinceps. Positis jam



AB, BC, CD, &c. radiis æqualium circulorum, perpendicula BK, CL, DM, &c. demissa in AC, BD, CE, &c. erunt sinus istorum angulorum, & AK, BL, CM, DN, &c. sinus complementorum ad rectum. Vel posita AB diametro illæ AK, BL, CM, &c. erunt chordæ. Sit ergo $AB = 2r$ & $AK = x$, dein sic operare.

$$AB . AK :: AC . AL.$$
$$2r \, . \, x :: 2x . \frac{xx}{r}.$$
$$\left.\begin{matrix} AL - AB \\ \text{Et } \frac{xx}{r} - 2r \end{matrix}\right\} = BL, \text{ Duplicatio.}$$
$$AB . AK :: AD \, (2AL - AB) . AM.$$
$$2r \, . \, x :: \frac{2xx}{r} - 2r \, . \, \frac{x^3}{rr} - x.$$
$$\left.\begin{matrix} AM - AC \\ \text{Et } \frac{x^3}{rr} - 3x \end{matrix}\right\} = CM, \text{ Triplicatio.}$$
$$AB . AK :: AE \, (2AM - AC) . AN.$$
$$2r \, . \, x :: \frac{2x^3}{rr} - 4x . \frac{x^4}{r^3} - \frac{2xx}{r}.$$
$$\left.\begin{matrix} AN - AD \\ \text{Et } \frac{x^4}{r^3} - \frac{4xx}{r} + 2r \end{matrix}\right\} = DN, \text{ Quadruplicatio.}$$

AB. AK. ::

AB. AK :: AF $(2AN - AD)$. AO.

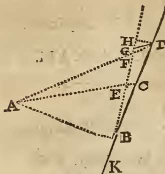
$$2r \,.\, x \;::\; \frac{2x^4}{r^3} - \frac{6xx}{r} + 2r \,.\, \frac{x^5}{r^4} - \frac{3x^3}{rr} + x.$$

$$\left.\begin{array}{l} AO - AE \\ \text{Et } \frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{rr} + 5x \end{array}\right\} = EO, \text{ Quintuplicatio.}$$

Et sic deinceps. Quod si velis angulum in aliquot partes dividere, pone q pro B L, C M, D N, &c. Et habebis $xx - 2rr = qr$ ad bisectionem, $x^3 - 3rrx = qrr$ ad trisectionem, $x^4 - 4rrxx + 2r^4 = qr^3$ ad quadrisectionem, $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x = qr^4$ ad quinquisectionem &c.

PROB. XXX.

Cometæ in linea recta B D uniformiter progredientis positionem cursus ex tribus observationibus determinare.



SIT A oculus spectatoris, B locus Cometæ in prima observatione, C in secunda ac D in tertia; quærenda erit inclinatio lineæ BD ad lineam AB. Ex observationibus itaq; dantur anguli B A C B A D; adeoq; si B H ducatur ad AB normalis & occurrens A C & A D in E & F, ex assumpto utcunque A B dabuntur B E & B F, tangentes nempe præfatorum angulorum respectu radii A B. Sit ergo A B $= a$, B E $= b$, & B F $= c$. Porro ex datis observationum intervallis dabitur ratio B C ad

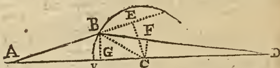
ad B D quæ si ponatur b ad e, & agatur D G parallela A C, cum sit B E ad B G in eadem ratione, & B E dicta fuerit b erit $BG = e$, adeoque $GF = e - c$. Adhæc si demittatur D H normalis ad B G, propter triangula A B F & D H F similia & similiter secta lineis A E ac D G, erit FE. AB :: FG. HD, hoc est $c - b . a :: e - c . \frac{ae - ac}{c - b} = HD$. Erit etiam FE. FB :: FG. FH, hoc est $c - b . c :: e - c . \frac{ce - cc}{c - b} = FH$; cui adde BF sive c & fit $BH = \frac{ce - cb}{c - b}$. Quare est $\frac{ce - cb}{c - b}$ ad $\frac{ae - ac}{c - b}$, (sive $ce - cb$ ad $ae - ac$, vel $\frac{ce - cb}{e - c}$ ad a) ut BH ad HD; hoc est ut tangens anguli HDB sive ABK ad radium. Quare cum a supponatur esse radius, erit $\frac{ce - cb}{e - c}$ tangens anguli ABK, adeoque facta resolutione erit ut $e - c$ ad $e - b$ (sive GF ad GE) ita c (sive tangens anguli BAF) ad tangentem anguli ABK.

Dic itaque ut tempus inter primam & secundam observationem, ad tempus inter primam ac tertiam, ita tangens anguli B A E, ad quartam proportionalem. Dein ut differentia inter illam quartam proportionalem & tangentem anguli B A F, ad differentiam inter eandem quartam proportionalem & tangentem anguli B A E, ita tangens anguli B A F, ad tangentem anguli A B K.

PROB. XXXI.

Radiis a puncto lucido ad sphæricam superficiem refringentem divergentibus, invenire concursus singulorum refractorum cum axe sphæra per punctum illud lucidum transeunte.

SIT A punctum illud lucidum, & BV sphæra, cujus axis AD, Centrum C, & vertex V, sitque AB radius incidens & BD refractus ejus, ac demissis



ad radios istos perpendicularibus CE & CF, ut & BG perpendiculari ad AD, actaque BC, dic $AC = a$, VC vel $BC = r$, $CG = x$, & $CD = z$, eritque $AG = a - x$, $BG = \sqrt{rr - xx}$, $AB = \sqrt{aa - 2ax + rr}$; & propter sim. tri. ABG & ACE, $CE = \frac{a\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}}$. Item $GD = z + x$, $BD = \sqrt{zz + 2zx + rr}$: & propter sim. tri. DBG ac DCF, $CF = \frac{z\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$. Præterea cum ratio sinuum incidentiæ & refractionis, adeoque CE ad CF detur, pone illam rationem esse a ad f, & erit

$$\frac{fa\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}} = \frac{az\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}},$$

ac multiplicando in crucem, dividendoque per $a\sqrt{rr - xx}$, erit

erit $f\sqrt{zz+2zx+rr} = z\sqrt{aa-2ax+rr}$, & quadrando, ac redigendo terminos in ordinem, $zz = \frac{2ffxz+ffrr}{aa-2ax+rr-ff}$. Denique pro dato $\frac{ff}{a}$ ſcribe p, & q pro dato $a+\frac{rr}{a}-p$, & erit $zz = \frac{2pxz+prr}{q-2x}$ ac $z = \frac{px+\sqrt{ppxx-2prrx+pqrr}}{q-2x}$. Inventum eſt itaque z; hoc eſt longitudo CD, adeoque punctum quæſitum D quo refractus BD concurrit cum axe. Q. E. F.

Poſui hic incidentes radios divergentes eſſe, & in Medium denſius incidere; ſed mutatis mutandis Problema perinde reſolvitur ubi convergunt, vel incidunt è denſiori Medio in rarius.

PROB. XXXII.

Si Conus plano quolibet ſecetur, invenire figuram ſectionis.

SIT ABC conus circulari baſi BC inſiſtens; IEM ejus ſectio quæſita; KILM alia quælibet ſectio parallela baſi, & occurrens priori ſectioni in HI; & ABC tertia ſectio perpendiculariter biſecans priores duas in EH & KL, & conum in triangulo ABC. Et producto EH donec occurrat ipſi AK in D, actiſque EF ac DG parallelis KL & occurrentibus AB & AC in F ac G, dic $EF = a$, $DG = b$,

 ED = c,

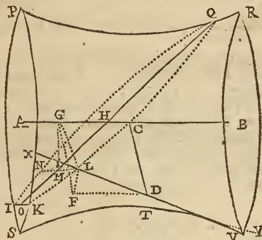
ED $= c$, EH $= x$, & HI $= y$; & propter sim. tri. EHL, EDG, erit ED. DG :: EH. HL $= \frac{bx}{c}$. Dein propter sim. tri. DEF, DHK, erit DE. EF :: DH. ($c - x$ in Fig. 1, & $c + x$ in Fig. 2.) HK $= \frac{ac \mp ax}{c}$. Deniq; cum sectio KIL sit parallela basi adeoque circularis, erit HK $\times$ HL $=$ HIq, hoc est $\frac{ab}{c}x \mp \frac{ab}{cc}xx = yy$, æquatio quæ exprimit relationem inter EH (x) & HI (y) hoc est inter axem & ordinatim applicatam sectionis EIM, quæ æquatio cum sit ad Ellipsin in Fig. 1, & ad Hyperbolam in Fig. 2. patet sectionem illam perinde Ellipticam vel Hyperbolicam esse.

Quod si ED nullibi occurrat AK, ipsi parallela existens, tunc erit HK $=$ EF (a,) & inde $\frac{ab}{c}x$ (HK $\times$ HL) $= yy$, æquatio ad Parabolam.

PROB

PROB. XXXIII.

Si recta XY circa axem AB, ad distantiam CD, in data inclinatione ad planum DCB convolvatur, & solidum PQRVTS ista convolutione generatum secetur plano quolibet INQLK; invenire figuram Sectionis.



Esto BHQ vel GHO inclinatio axis AB ad planum sectionis; & L quilibet concursus rectæ XY cum plano illo. Age DF parallelam AB, & ad AB, DF & HO demitte perpendiculares LG, LF, LM, ac junge FG & MG. Dictisque $CD = a$, $CH = b$, $HM = x$, & $ML = y$; & propter datum angulum GHO posito MH. HG :: d. e: erit $\frac{ex}{d} = GH$, & $b + \frac{ex}{d}$ GC vel FD. Adhæc propter angulum datum LDF (nempe inclinationem rectæ XY ad planum GCDF) posito

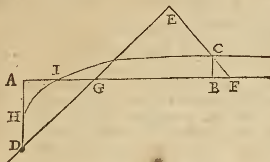
posito FD. FL :: $g. h$, erit $\frac{hb}{g} + \frac{hex}{dg} = FL$, cujus quadrato adde FG$q$, (DC$q$ seu aa) & emerget $GLq = aa + \frac{hhbb}{gg} + \frac{2hhbex}{dgg} + \frac{hheexx}{ddgg}$. Hinc aufer MG$q$ (HMq − HGq seu $xx - \frac{ee}{dd}xx$) & restabit $\frac{aagg + hhbb}{gg} + \frac{2hhbe}{dgg}x + \frac{hhee - ddgg + eegg}{ddgg}xx$ (= MLq) $= yy$: æquatio quæ exprimit relationem inter x & y, hoc est inter HM axem sectionis, & ML ordinatim applicatam. Et proinde cum in hac æquatione x & y ad duas tantum dimensiones ascendant, patet figuram INQLK esse conicam sectionem. Utpote si angulus MHG major sit angulo LDF, Ellipsis erit hæc figura; si minor, Hyperbola; si æqualis vel Parabola, vel (coincidentibus insuper punctis C & H) parallelogrammum.

PROB. XXXIV.

Si ad AF erigatur perpendiculum AD datæ longitudinis, & normæ DEF crus unum ED continuo transeat per punctum D dum alterum crus EF æquale AD dilabatur super AF; invenire curvam HIC quam crus EF medio ejus puncto C describit.

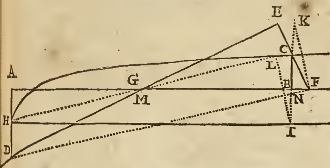
SIT EC vel CF = a, perpendiculum CB = y, AB = x, & propter similia triangula FBC, FEG, erit BF ($\sqrt{aa - yy}$.) BC + CF ($y + a$) :: EF

EF (2a.) EG + GF (AG + GF) seu AF. Quare



$\frac{2ay+2aa}{\sqrt{aa-yy}}$ (= AF = AB + BF) $= x +$ $\sqrt{aa-yy}$. Jam multiplicando per $\sqrt{aa-yy}$ fit $2ay+2aa = aa-yy+x\sqrt{aa-yy}$, seu $2ay + aa + yy = x\sqrt{aa-yy}$, & quadrando partes divisas per $\sqrt{a+y}$, ac ordinando prodit $y^3 + 3ayy \begin{matrix} +3aa \\ +xx \end{matrix} y \begin{matrix} +a^3 \\ -axx \end{matrix} = 0$.

Idem aliter.



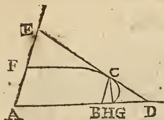
In BC cape hinc inde BI, & CK æquales CF,

 &

& age KF, HI, HC, ac DF; quarum HC ac DF occurrant ipsis AF & IK in M & N, & in HC demitte normalem IL. Eritque angulus $K = \frac{1}{2}BCF = \frac{1}{2}EGF = GFD = AMH = MHI = CIL$; adeoque triangula rectangula KBF, FBN, HLI & ILC similia. Dic ergo $FC = a$, $HI = x$, & $IC = y$; & erit BN $(2a - y.)$ BK $(y)::$ LC. LH :: CIq $(yy.)$ HIq $(xx.)$ adeoque $2axx - yxx = y^3$. Ex qua æquatione facile colligitur hanc curvam esse Cissoidem Veterum, ad circulum cujus centrum sit A ac radius AH pertinentem.

PROB. XXXV.

Si datæ longitudinis recta ED angulum datum EAD subtendens ita moveatur ut termini ejus D & E anguli istius latera AD & AE perpetim contingant; proponatur Curvam FCG determinare quam punctum quodvis C in recta ista ED datum describit.



A Dato puncto C age CB parallelam EA; & dic $AB = x$, $BC = y$, $CE = a$ & $CD = b$, & propter similia triangula DCB, DEA erit EC . AB :: CD . BD. hoc est $a . x :: b . BD = \frac{bx}{a}$. Præterea demisso perpendiculo CH, propter datum angulum DAE vel DBC, adeoque datam rationem laterum trianguli rectanguli BCH sit $a . e :: BC . BH$, & erit $BH = \frac{ey}{a}$.

Aufer

Aufer hanc de BD & reſtabit $HD = \frac{bx - ey}{a}$. Jam in triangulo BCH propter angulum rectum BHC eſt $BCq - BHq = CHq$, hoc eſt $yy - \frac{eeyy}{aa} = CHq$. Similiter in triangulo CDH propter angulum CHD rectum, eſt $CDq - CHq = HDq$, hoc eſt $bb - yy + \frac{eeyy}{aa}$ ($= HDq = \frac{bx - ey}{a}$ quadrato) $= \frac{bbxx - 2bexy + eeyy}{aa}$. Et per reductionem $yy = \frac{2be}{aa}xy + \frac{aabb - bbxx}{aa}$: Ubi cum incognitæ quantitates ſint duarum tantum dimenſionum, patet curvam eſſe Conicam ſectionem. Præterea extracta radice fit

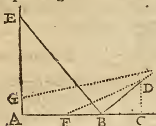
$y = \frac{bex \pm b\sqrt{eexx - aaxx + a^4}}{aa}$. Ubi in termino radicali coefficiens ipſius xx eſt $ee - aa$. Atqui erat $a . e :: BC . BH$; & BC neceſſario major eſt linea quam BH, nempe Hypotenuſa trianguli rectanguli major latere; ergo a major quam e, & $ee - aa$ negativa eſt quantitas, atque adeo curva erit Ellipſis.

PROB.

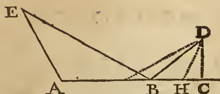
PROB. XXXVI.

Si norma EBD ita moveatur ut ejus crus unum EB continuo subtendat angulum rectum EAB, dum terminus alterius cruris BD describat curvam aliquam lineam FDG; invenire lineam istam FDG quam punctum D describit.

A Puncto D ad latus AC demitte perpendiculum DC; & dictis $AC = x$, & $DC = y$, atque $EB = a$ & $BD = b$; in triangulo BDC propter angulum rectum ad C, est $BCq = BDq - DCq = bb - yy$. Ergo $BC = \sqrt{bb - yy}$ & $AB = x - \sqrt{bb - yy}$. Præterea propter similia triangula BEA. DBC, est $BD . DC :: EB . AB$. hoc est $b . y :: a . x - \sqrt{bb - yy}$. Quare $bx - b\sqrt{bb - yy} = ay$, sive $bx - ay = b\sqrt{bb - yy}$. Et partibus quadratis ac debite reductis $yy = \frac{2abxy + b^4 - bbxx}{aa + bb}$. Et extracta radice $y = \frac{abx \pm bb\sqrt{aa + bb - xx}}{aa + bb}$. Unde patet iterum Curvam esse Ellipsin.



Hæc ita se habent ubi anguli EBD & EAB recti sunt: Sed si anguli isti sunt alterius cujusvis magnitudinis, dummodo sint æquales, sic procedendum

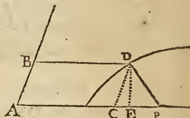


dendum erit. Demittatur DC perpendicularis ad AC ut ante, & agatur DH conſtituens angulum DHA æqualem angulo HAE puta obtuſum, dictiſque $EB = a$, $BD = b$, $AH = x$, & $HD = y$, propter ſimilia triangula EAB, BHD, erit BD. DH :: EB . AB . hoc eſt $b . y :: a . AB = \frac{ay}{b}$. Aufer hanc de AH, & reſtabit $BH = x - \frac{ay}{b}$. Præterea in triangulo DHC propter omnes angulos datos, adeoque datam rationem laterum, aſſume DH ad HC in ratione quavis data, puta b ad e, & cum DH ſit y, erit HC $\frac{ey}{b}$, & HB×HC $= \frac{exy}{b} - \frac{aeyy}{bb}$. Denique per 12. II. Elem. in triangulo BHD eſt $BDq = BHq + DHq + 2BH \times HC$, hoc eſt $bb = xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} + yy + \frac{2exy}{b} - \frac{2aeyy}{bb}$. Et extracta radice $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{eeyy - bbyy + bbbb}}{b}$. Ubi cum b ſit major e hoc eſt $ee - bb$ negativa quantitas, patet iterum curvam eſſe Ellipſin.

PROB.

PROB. XXXVII.

In dato angulo PAB actis utcunque rectis BD, PD in data ratione hac semper lege, ut BD sit parallela AP, & PD terminetur ad punctum P in recta AP datum; invenire locum puncti D.



Age CD parallelam AB & DE perpendicularem AP; ac dic $AP = a$, $CP = x$, & $CD = y$, sitque BD ad PD in ratione d ad e, & erit AC vel $BD = a - x$, & $PD = \frac{ea - ex}{d}$. Sit insuper propter datum angulum DCE, ratio CD ad CE, d ad f, & erit $CE = \frac{fy}{d}$, & $EP = x - \frac{fy}{d}$. Atqui propter angulos ad E rectos est $CDq - CEq$ $(= EDq) = PDq - EPq$, hoc est $yy - \frac{ffyy}{dd}$ $= \frac{eeaa - 2eeax + eexx}{dd} - xx + \frac{2fxy}{d} - \frac{ffyy}{dd}$. Ac deletis utrobiq; $-\frac{ffyy}{dd}$, terminisq; rite dispositis $yy = \frac{2fxy}{d} + \frac{eeaa - 2eeax + eexx - ddxx}{dd}$. Et ex-

tracta radice $y = \frac{fx}{d} \pm \frac{\sqrt{eeaa - 2eeax - ddxx \atop {+ee \atop +ff}}}{d}$.

Ubi cum x & y in æquatione penultima non nisi ad duas dimensiones ascendant, locus puncti **D** erit Conica sectio, eaque Hyperbola Parabola vel Ellipsis prout $ee - dd + ff$, (coefficiens ipsius xx in æquatione posteriori,) sit majus, æquale, vel minus nihilo.

PROB. XXXVIII.

Rectis duabus VE & VC positione datis, & ab alia recta PE circa polum positione datum P vertente sectis utcunque in C & E; si recta intercepta CE dividatur in partes CD, DE rationem datam habentes, proponatur invenire locum puncti D.

AGE VP, eique parallelas **D**A, EB occurrentes VC in A & B. Dic $VP = a$, $VA = x$, & $AD = y$, & cum detur ratio **C**D ad **D**E, vel converse ratio **C**D ad **C**E, hoc est ratio **D**A ad EB, sit ista ratio d ad e, & erit $EB = \frac{ey}{d}$. Praeterea cum detur angulus EVB, adeoque ratio EB ad VB, sit ista ratio e ad f; & erit $VB = \frac{fy}{d}$. Denique propter similia triangula CEB, CDA, CPV,

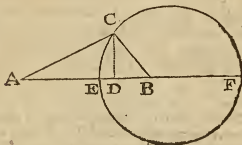
CPV, est EB . CB :: DA . CA :: VP . VC, & componendo EB + VP . CB + VC :: DA + VP . CA + VC. Hoc est $\frac{ey}{d} + a \, . \, \frac{fy}{d} :: y + a \, . \, x$. Ductisque extremis & mediis in se $eyx + dax = fyy + fay$. Ubi cum indefinitæ quantitates x & y non nisi ad duas dimensiones ascendant, sequitur curvam VD, in qua punctum D perpetim reperitur, esse conicam sectionem, eamque Hyperbolam; quia una ex indefinitis quantitatibus, nempe x est unius tantum dimensionis, & in termino exy multiplicatur per alteram indefinitam quantitatem y.

PROB. XXXIX.

Si rectæ duæ AC, BC à duobus positione datis punctis A & B in data quavis ratione ad tertium quodvis punctum C ducantur; invenire locum puncti concursus C.

Junge AB; & ad hanc demitte normalem CD: dictisque $AB = a$, $AD = x$, $DC = y$: Erit AC =

$AC = \sqrt{xx+yy}$. $BD = a - x$ & $BC (= \sqrt{BDq + DCq})$ $= \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$. Jam cum detur ra-



tio AC ad BC, ſit iſta d ad e; &, extremis & mediis in ſe ductis, erit $e\sqrt{xx+yy} = d\sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$. Et per reductionem $\sqrt{\frac{ddaa - 2ddax}{ee - dd} - xx} = y$. Ubi cum xx ſit negativum, & ſola unitate affectum; atque etiam angulus ADC rectus, patet curvam in qua punctum C locatur eſſe circulum. Nempe in recta AB cape puncta E & F ita ut ſint $d.e :: AE.BE :: AF.BF$, & erit EF circuli hujus diameter.

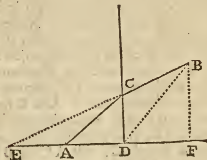
Et hinc è converſo patet hoc Theorema, quod in circuli cujuſvis diametro EF infinite producta datis utcunque duobus punctis A & B hac lege ut ſit $AE.AF :: BE.BF$, & á punctis hiſce actis duabus rectis AC, BC concurrentibus ad circulum in puncto quovis C: erit AC ad BC in data ratione AE ad BE.

PROB.

PROB. XL.

Si punctum lucidum A radios versus refringentem superficiem planam CD ejiciat; invenire radium AC, cujus refractus CB impinget in datum punctum B.

A Puncto isto lucido ad refringens planum demitte perpendiculum AD, & cum eo utrinque producto concurrat refractus radius BC in E, & perpendiculum à puncto B demissum in F, & agatur BD; dictisque $AD = a$, $DB = b$, $BF = c$, $DC = x$, statue rationem sinuum incidentiæ & refractionis, hoc est sinuum angulorum CAD, CED esse d ad e, & cum EC & AC (ut notum est) sint in eadem ratione, & AC sit $\sqrt{aa + xx}$



erit

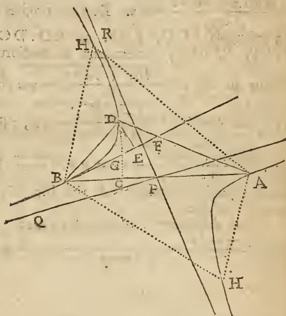
erit $EC = \frac{d}{e}\sqrt{aa+xx}$. Præterea est ED $(= \sqrt{ECq - CDq}) = \sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$; & $DF = \sqrt{bb-cc}$, atque $EF = \sqrt{bb-cc} + \sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$. Denique propter similia triangula ECD, EBF, est ED.DC:: EF.FB, &, ductis extremorum & mediorum valoribus in se, $c\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx} = x\sqrt{bb-cc} + x\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$; sive $\overline{c-x}\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx} = x\sqrt{bb-cc}$. Et partibus æquationis quadratis & rite dispositis

$$x^4 - 2cx^3 + \frac{\begin{matrix} ddcc \\ -eebb \end{matrix} + ddaaxx - 2ddaacx + ddaacc}{dd-ee} = 0.$$

 PROB.

PROB. XLI.

Invenire locum verticis trianguli D, cujus basis AB datur, & anguli ad basem DAB, DBA datam habent differentiam.



UBI angulus ad Verticem, sive (quod perinde est) ubi summa angulorum ad basem datur, docuit Euclides locum verticis esse circumferentiam circuli; proposuimus igitur inventionem loci ubi differentia angulorum ad basem datur. Sit angulus DBA major angulo DAB, sitque ABF eorum data differentia, recta BF occurrente AD in F. Insuper ad BF demittatur normalis DE, ut & ad AB

III. 29. Euclid.

AB normalis DC, occurrens BF in G. Dictisque $AB = a$, $AC = x$, & $CD = y$, erit $BC = a - x$. Jam in triangulo BCG cum dentur omnes anguli dabitur ratio laterum BC & GC; sit ista d ad a, & erit $CG = \frac{aa - ax}{d}$. Aufer hanc de DC sive y & restabit $DG = \frac{dy - aa + ax}{d}$. Præterea propter similia triangula BGC, DGE est BG.BC :: DG.DE. Est autem in triangulo BGC, $a.d$ :: CG.BC. Adeoque $aa.dd$ :: $CGq.BCq$, & componendo $aa + dd.dd$ :: $BGq.BCq$. Et extractis radicibus $\sqrt{aa + dd}.d$ (:: BG.BC) :: DG.DE. Ergo $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Adhæc cum angulus ABF sit differentia angulorum BAD & ABD, adeoque anguli BAD & FBD æquentur, similia erunt triangula rectangula CAD & EBD, & proinde latera proportionalia DA.DC :: DB.DE. Sed est $DC = y$. $DA (= \sqrt{ACq + DCq}) = \sqrt{xx + yy}$. $DB (= \sqrt{BCq + DCq}) = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, & supra erat $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Quare est

$$\sqrt{xx + yy}.y :: \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}.\frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}.$$

Et extremorum & mediorum quadratis in se ductis

$$aayy - 2axyy + xxyy + y^4 = \frac{ddxxyy + ddy^4}{aa + dd}$$

$$\frac{- 2aadxxy - 2aady^3 + 2adyx^3 + 2adxy^3 + a^4xx}{aa + dd}$$

$$\frac{+ a^4yy - 2a^3x^3 - 2a^3xyy + aax^4 + aaxxyy}{aa + dd}.$$

M 2 Duc

Duc omnes terminos in $aa + dd$, & prodeuntes redige in debitum ordinem, & orietur

$$x^4 \begin{array}{l} -2a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x^3 \begin{array}{l} -2dy \\ +aa \end{array} xx \begin{array}{l} +\frac{2d}{a}y^3 \\ +\frac{2dd}{a}yy \end{array} x \begin{array}{l} -ddyy \\ -2dy^3 \\ -y^4 \end{array} = 0.$$

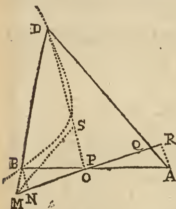
Divide hanc æquationem per $xx - ax \begin{array}{l} +dy \\ +yy \end{array}$, & orietur $xx \begin{array}{l} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x \begin{array}{l} -yy \\ -dy \end{array} = 0$. Duæ itaque prodierunt æquationes in solutione hujus Problematis. Prior $xx - ax \begin{array}{l} +dy \\ +yy \end{array} = 0$ est ad circulum, locum nempe puncti D ubi angulus FBD sumitur ad alias partes rectæ BF quam in figura describitur, existente angulo ABF summa angulorum DAB DBA ad basem, adeoque angulo ADB ad verticem dato. Posterior $xx \begin{array}{l} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x \begin{array}{l} -yy \\ -dy \end{array} = 0$ est ad Hyperbolam, locum puncti D ubi angulus FBD situm obtinet à recta BF quem in Figura descripsimus: hoc est ita ut angulus ABF sit differentia angulorum DAB, DBA ad basem. Hyperbolæ autem hæc est determinatio. Biseca AB in P. Age PQ constituentem angulum BPQ æqualem dimidio anguli ABF. Huic erige normalem PR, & erunt PQ, PR Assymptoti hujus Hyperbolæ, & B punctum per quod Hyperbola transibit.

Et hinc prodit tale Theorema. Hyperbolæ rectangulæ diametro quavis AB ducta, & à terminis ejus ad Hyperbolæ puncta duo quævis D & H ductis rectis AD, BD, AH, BH; hæ rectæ angulos DAH, DBH ad terminos diametri constituent æquales.

Idem

Idem brevius.

Ad Prob. XXIV. *Regulam* de commoda terminorum ad ineundum calculum electione tradidi; ubi obvenit ambiguitas in electione. Hic differentia angulorum ad basem eodem modo se habet ad utrumque angulum; & in constructione Schematis æque potuit addi ad angulum minorem DAB, ducendo ab A rectam ipsi BF parallelam, ac subtrahi ab angulo majori DBA ducendo rectam BF. Quamobrem nec addo nec subtraho, sed dimidium ejus uni angulorum addo, alteri subtraho. Deinde cum etiam ambiguum sit utrum AC vel BC pro termino indefinito cui ordinatim applicata DC insistit adhibeatur, neutrum adhibeo; sed biseco AB in P, & adhibeo PC: vel potius acta MPQ constituente hinc inde angulos APQ, BPM æquales dimidio differentiæ angulorum ab basem, ita ut ea cum rectis AD, BD constituat angulos DQP, DMP æquales; ad MQ demitto normales AR, BN, DO & adhibeo DO pro ordinatim applicata, ac PO pro indefinita linea cui insistit. Voco itaque $PO = x$, $DO = y$, AR vel $BN = b$, & PR vel $PN = c$.



Et propter similia triangula BNM, DOM, erit BN . DO :: MN . MO. Et dividendo, DO — BN $(y-b)$. DO (y) :: MO — MN (ON sive

$c - x)$. MO. Quare $MO = \frac{cy - xy}{y - b}$. Similiter ex altera parte propter similia triangula ARQ, DOQ, erit AR.DO::RQ.QO: & componendo $DO + AR$ $(y + b)$. DO (y) :: QO + RQ (OR sive $c + x$). QO. Quare QO $= \frac{cy + xy}{y + b}$. Denique propter æquales angulos DMQ, DQM æquantur MO & QO, hoc est $\frac{cy - xy}{y - b} = \frac{cy + xy}{y + b}$. Divide omnia per y, & multiplica per denominatores, & orietur $cy + cb - xy - xb = cy - cb + xy - xb$, sive $cb = xy$, notissima æquatio ad Hyperbolam.

Quin etiam locus puncti D sine calculo Algebraico prodire potuit. Est enim ex superioribus DO − BN.ON :: DO.MO(QO) :: DO + AR.OR. Hoc est DO − BN. DO + BN :: ON.OR, & mixtim DO.BN :: $\frac{ON + OR}{2}$ (NP). $\frac{OR - ON}{2}$ (OP). Adeoque DO × OP = BN × NP.

PROB. XLII.

Locum verticis trianguli invenire cujus Basis datur, & angulorum ad basem unus dato angulo differt à duplo alterius.

IN Schemate novissimo superioris Problematis sit ABD triangulum istud, AB basis bisecta in P, APQ vel BPM triens anguli dati, quo angulus DBA excedit duplum anguli DAB: & angulus

angulus D M Q erit duplus anguli D Q M. Ad MQ demitte perpendicula AR, BN, DO; & angulum DMQ biseca recta MS occurrente DO in S; & erunt triangula DOQ, SOM similia; adeoque O Q . O M :: O D . O S, & dividendo O Q − O M . O M :: S D . O S :: (per 3. VI. Elem.) DM . OM Quare (per 9. V. Elem.) OQ − OM = D M. Dictis jam P O = x, O D = y, A R vel B N = b, & P R vel P N = c, erit ut in superiori Problemate $OM = \frac{cy - xy}{y - b}$, & $OQ = \frac{cy + xy}{y + b}$, adeoque $OQ - OM = \frac{-2bcy + 2xyy}{yy - bb}$. Pone jam $DOq + OMq = DMq$, hoc est $yy + \frac{cc - 2cx + xx}{yy - 2by + bb} yy = \frac{4bbcc - 8bcxy + 4xxyy}{y^4 - 2bbyy + b^4} yy$. Et per debitam reductionem orietur tandem

$$y^4 * \begin{array}{l} +cc \\ -2bb \\ -2cx \\ -3xx \end{array} yy \begin{array}{l} +2bxx \\ +4bcx \\ +2bcc \end{array} y \begin{array}{l} +b^4 \\ -3bbcc \\ -2bbcx \\ +bbxx \end{array} = 0.$$

Divide omnia per $y - b$, & evadet

$$y^3 + byy \begin{array}{l} -bb \\ +cc \\ -2cx \\ -3xx \end{array} y \begin{array}{l} -b^3 \\ +3bcc \\ +2bcx \\ -bxx \end{array} = 0.$$ Quare punctum D est ad Curvam trium dimensionum; quæ tamen evadit Hyperbola ubi angulus BPM statuitur nullus, sive angulorum ad basem unus DBA duplus alterius DAB. Tunc enim BN, sive b evanescente, æquatio fiet $yy = 3xx + 2cx - cc$.

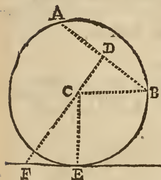
Ex hujus autem æquationis constructione tale elicitur Theorema. Si centro C, Asymptotis CS, CT, angulum SCT 120 graduum continentibus describatur Hyperbola quævis D V, cujus semi-

axes ſint CV, CA; produc CV ad B, ut ſit VB = VC, & ab A & B actis utcunque rectis AD, BD concurrentibus ad Hyperbolam, erit angulus BAD dimidium anguli ABD, triens vero anguli ADE quem recta AD comprehendit cum BD producta, Hoc intelligendum eſt de Hyperbola quæ tranſit per punctum V. Quod ſi ab iiſdem punctis A & B actæ rectæ A*d*, B*d* conveniant ad conjugatam Hyperbolam quæ tranſit per A: tunc externorum angulorum trianguli ad baſem, ille ad B erit duplus alterius ad A.

PROB. XLIII.

Circulum per data duo puncta deſcribere qui rectam poſitione datam continget.

SUnto A & B puncta data, & EF recta poſitione data, & requiratur circulum ABE, per iſta puncta deſcribere qui contingat rectam iſtam FE. Junge AB, & eam biſeca in D. Ad D erige normalem



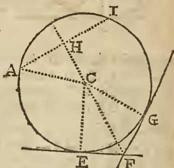
malem DF occurrentem rectæ FE in F, & circuli centrum incidet in hanc noviſſime ductam DF, puta in C. Junge ergo CB; & ad FE demitte CE normalem, eritque E punctum contactus, ac CB, CE æquales inter ſe, utpote radii circuli quæſiti. Jam cum puncta A, B, D, & F dentur, eſto $DB = a$, ac $DF = b$; & ad determinandum centrum circuli quæratur DC, quam ideo dic x. Jam in triangulo CDB propter angulum ad D rectum, eſt $\sqrt{DBq + DCq}$, hoc eſt $\sqrt{aa + xx} = CB$. Eſt & $DF - DC$ ſive $b - x = CF$. Et in triangulo rectangulo CFE cum dentur anguli, dabitur ratio laterum CF & CE; ſit iſta d ad e; & erit $CE = \frac{e}{d} \times CF$ hoc eſt $= \frac{eb - ex}{d}$. Pone jam CB & CE, (radios nempe circuli quæſiti,) æquales inter ſe, & habebitur æquatio $\sqrt{aa + xx} = \frac{eb - ex}{d}$. Cujus partibus quadratis & multiplicatis per dd, oritur $aadd + ddxx = eebb - 2eebx + eexx$. Sive $xx = \frac{-2eebx - aadd}{dd - ee}$ $\begin{matrix} \\ + eebb \end{matrix}$. Et extracta radice, $x = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$. Inventa eſt ergo longitudo DC adeoque centrum C, quo circulus per puncta A & B deſcribendus eſt ut contingat rectam FE.

PROB.

PROB. XLIV.

Circulum per datum punctum describere qui rectas duas positione datas continget.

Resolvitur ut *Prop.* 43. Nam dato puncto A, datur & aliud punctum B.



Esto datum punctum A, & sint EF, FG rectæ duæ positione datæ, & AEG circulus quæsitus easdem contingens, ac transiens per punctum istud A. Recta CF bisecetur angulus EFG & centrum circuli in ipsa reperietur. Sit istud C; & ad EF & FG demissis perpendiculis CE, CG erunt E ac G puncta contactus. Jam in triangulis CEF, CGF, cum anguli ad E & G, sint recti, & anguli ad F semisses sint anguli EFG, dantur omnes anguli adeoque ratio laterum CF & CE vel CG. Sit ista d ad e, & si ad determinandum centrum circuli quæsiti C, assumatur $CF = x$, erit CE vel $CG = \frac{ex}{d}$. Præterea ad FC demitte normalem AH, & cum punctum A detur, dabuntur etiam rectæ AH & FH. Dicantur istæ a & b, & ab FH sive b ablato FC sive x restabit $CH = b - x$. Cujus quadrato $bb - 2bx + xx$ adde quadratum ipsius AH, sive aa & summa $aa + bb - 2bx + xx$, erit ACq per 47. I. Elem. siquidem angulus AHC ex Hypothesi sit rectus. Pone jam radios circuli AC & CG inter se

ſe æquales; hoc eſt pone æqualitatem inter eorum valores, vel inter quadrata eorum, & habebitur æquatio $aa + bb - 2bx + xx = \frac{eexx}{dd}$. Aufer utrobique xx, & mutatis omnibus ſignis erit $-aa - bb + 2bx = xx - \frac{eexx}{dd}$. Duc omnia in dd, ac divide per $dd - ee$, & evadet $\frac{-aadd - bbdd + 2bddx}{dd - ee} = xx$. Cujus æquationis extracta radix eſt $x = \frac{bdd - d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$. Inventa eſt itaque longitudo FC, adeoque punctum C, quod centrum eſt circuli quæſiti.

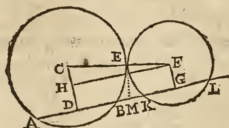
Si inventus valor x ſive FC auferatur de b ſive HF, reſtabit $HC = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$, eadem æquatio quæ in priori problemate prodiit, ad determinandum longitudinem DC.

PROB. XLV.

Vide *Prop.* 21. *Circulum per data duo puncta deſcribere, qui alium circulum poſitione datum continget.*

SInt A, B puncta data, EK circulus poſitione & magnitudine datus, F centrum ejus, ABE circulus quæſitus per puncta A & B tranſiens, ac tangens alterum circulum in E, & C centrum ejus. Ad AB productum demitte perpendicula CD, & FG & age CF, ſecantem circulos in puncto contactus E, ac age etiam FH parallelam DG, & occurrentem CD in H. His conſtructis dic AD vel

vel DB $= a$, DG vel HF $= b$, GF $= c$, & EF (radium nempe circuli dati) $= d$, atque DC $= x$:



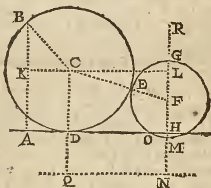
& erit $CH\ (= CD - FG) = x - c$, & $CFq\ (= CHq + HFq) = xx - 2cx + cc + bb$, atque $CBq\ (= CDq + DBq) = xx + aa$, adeoque CB vel $CE = \sqrt{xx + aa}$. Huic adde EF, & habebitur $CF = d + \sqrt{xx + aa}$, cujus quadratum $dd + aa + xx + 2d\sqrt{xx + aa}$, æquatur valori ejusdem CFq prius invento, nempe $xx - 2cx + cc + bb$. Aufer utrobique xx, & restabit $dd + aa + 2d\sqrt{xx + aa} = cc + bb - 2cx$. Aufer insuper $dd + aa$, & habebitur $2d\sqrt{xx + aa} = cc + bb - dd - aa - 2cx$. Jam, abbreviandi causa, pro $cc + bb - dd - aa$, scribe $2gg$, & habebitur $2d\sqrt{xx + aa} = 2gg - 2cx$, sive $d\sqrt{xx + aa} = gg - cx$. Et partibus æquationis quadratis, erit $ddxx + ddaa = g^4 - 2ggcx + ccxx$. Utrinque aufer $ddaa$ & $ccxx$, & restabit $ddxx - ccxx = g^4 - ddaa - 2ggcx$. Et partibus æquationis divisis per $dd - cc$, habebitur $xx = \frac{g^4 - ddaa - 2ggcx}{dd - cc}$. Atque per extractionem radicis affectæ $x = \frac{-ggc + \sqrt{g^4dd - d^4aa + ddaacc}}{dd - cc}$.

Inventa

Inventa igitur x, five longitudine DC, biseca AB in D, & ad D erige perpendiculum DC $= \frac{-ggc + d\sqrt{g^4 - aadd + aacc}}{dd - cc}$. Dein centro C per punctum A vel B describe circulum ABE; nam hic continget alterum circulum EK, & transibit per utrumque punctum A, B. Q.E.F.

PROB. XLVI.

Circulum per datum punctum describere qui datum circulum, & rectam lineam positione datam continget.

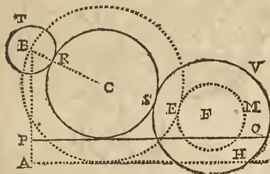


SIT circulus iste describendus BD, ejus centrum C, punctum per quod describi debet B, recta quam continget AD, punctum contactus D, circulus quem continget GEM, ejus centrum F, & punctum contactus E. Junge CB, CD, CF, & CD erit perpendicularis ad AD, atque CF secabit circulos in puncto contactus E. Produc CD ad Q ut fit DQ = EF & per Q age QN parallelam AD. Denique à B & F ad AD & QN demitte perpendicula BA, FN, & à C ad AB & FN perpendicula

pendicula CK, CL. Et cum sit $BC = CD$ vel AK, erit $BK (= AB - AK) = AB - BC$, adeoque $BKq = ABq - 2AB \times BC + BCq$. Aufer hoc de BCq, & restabit $2AB \times BC - ABq$, pro quadrato de CK. Est itaque $AB \times \overline{2BC - AB} = CKq$; & eodem argumento erit $FN \times \overline{2FC - FN} = CLq$, atque adeo $\frac{CKq}{AB} + AB = 2BC$, & $\frac{CLq}{FN} + FN = 2FC$. Quamobrem si pro AB, CK, FN, KL, & CL, scribas a, y, b, c, & $c - y$, erit $\frac{yy}{2a} + \frac{1}{2}a = BC$, & $\frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b = FC$. De FC aufer BC, & restabit $EF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$. Jam si puncta ubi FN producta secat rectam AD, & circulum GEM notentur literis H, G, & M & in HG producta capiatur $HR = AB$, cum sit $HN (= DQ = EF) = GF$, addendo FH utrinque erit $FN = GH$, adeoque $AB - FN (= HR - GH) = GR$, & $AB - FN + 2EF$, hoc est $a - b + 2EF = RM$, & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + EF = \frac{1}{2}RM$. Quare cum supra fuerit $EF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$, si hoc scribatur pro EF habebitur $\frac{1}{2}RM = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} - \frac{yy}{2a}$. Dic ergo RM d, & erit $d = \frac{cc - 2cy + yy}{b} - \frac{yy}{a}$. Duc omnes terminos in a & b, & orietur $abd = acc - 2acy + ayy - byy$. Aufer utrinque $acc - 2acy$, & restabit $abd - acc + 2acy = ayy - byy$. Divide per

per $a-b$, & orietur $\frac{abd-acc+2acy}{a-b}=yy$. Et extracta radice $y=\frac{ac}{a-b}\frac{+}{-}\sqrt{\frac{aabd-abbd+abcc}{aa-2ab+bb}}$. Quæ conclusiones sic abbreviari possunt. Pone $c.b::d.e$, dein $a-b.a::c.f$; & erit $fe-fc+2fy=yy$, sive $y=f\frac{+}{-}\sqrt{ff+fe-fc}$. Invento y sive KC vel AD, cape AD $=f\frac{+}{-}\sqrt{ff+fe-fc}$, ad D erige perpendiculum DC ($=$ BC) $=\frac{KCq}{2AB}+\frac{1}{2}AB$, & centro C, intervallo CB vel CD describe circulum BDE, nam hic transiens per datum punctum B, tanget rectam AD in D, & circulum GEM in E. Q. E. F.

Hinc circulus etiam describi potest qui duos datos circulos, & rectam positione datam continget.

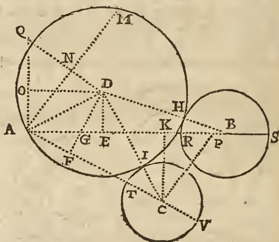


Sint enim circuli dati RT, SV, eorum centra B, F, & recta positione data PQ. Centro F, radio FS $-$ BR describe circulum EM. A puncto B, ad rectam PQ demitte perpendiculum BP, & producto eo ad A ut sit PA $=$ BR per A age AH parallelam PQ, & circulus describatur qui transeat per

per punctum B, tangatque rectam AH, & circulum EM. Sit ejus centrum C; junge BC secantem circulum RT in R, & eodem centro C, radio vero CR descriptus circulus RS tanget circulos RT, SV, & rectam PQ, ut ex constructione manifestum est.

PROB. XLVII.

Circulum describere qui per datum punctum transibit, & alios duos positione, & magnitudine datos circulos continget.



Esto punctum datum A, sintque circuli positione, & magnitudine dati TIV, RHS, centra eorum C & B, circulus describendus AIH centrum, ejus D, & puncta contactus I & H. Junge AB, AC, AD, DB, secetque AB producta circulum RHS in punctis R & S, & AC, producta circulum

lum TIV in T & V. Et à punctis D & C demissis perpendiculis DE ad AB, & DF ad AC occurrente AB in G, atque CK ad AB; in triangulo ADB erit $ADq - DBq + ABq = 2AE \times AB$, per 13. II. Elem. Sed $DB = AD + BR$, adeoque $DBq = ADq + 2AD \times BR + BRq$. Aufer hoc de $ADq + ABq$, & restabit $ABq - 2AD \times BR - BRq$, pro $2AE \times AB$. Est & $ABq - BRq = \overline{AB - BR} \times \overline{AB + BR} = AR \times AS$. Quare $AR \times AS - 2AD \times BR = 2AE \times AB$. Et $\frac{AR \times AS - 2AB \times AE}{BR} = 2AD$.

Et simili ratiocinio in triang. ADC emerget iterum $2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Quare $\frac{RAS - 2BAE}{BR} = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Et $\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} = \frac{2CAF}{CT}$. Et $\overline{\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR}} \times \frac{CT}{2AC} = AF$. Unde cum sit $AK . AC :: AF . AG$, erit $AG = \overline{\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR}} \times \frac{CT}{2AK}$. Aufer hoc de AE sive $\frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$, & restabit $GE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT}} \times \frac{CT}{2AK}$. Unde cum sit $KC . AK :: GE . DE$; erit $DE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$. In AB cape AP quæ sit ad AB ut CT ad BR, & erit $\frac{2PAE}{CT} = \frac{2BAE}{BR}$, adeoque $\frac{2PK \times AE}{CT}$

N $= 2BAE$

$= \frac{2BAE}{BR} - \frac{2KAE}{CT}$, adeoque

$DE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2PK \times AE}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$. Ad AB erige ergo perpendiculum $AQ = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$, & in eo cape $QO = \frac{PK \times AE}{KC}$, & erit $AO = DE$.

Junge DO, DQ, CP, & triangula DOQ, CKP erunt similia, quippe quorum anguli ad O & K sunt recti, & latera (KC. PK :: AE, vel DO. QO) proportionalia. Anguli ergo OQD, KPC æquales sunt, & proinde QD perpendicularis est ad CP. Quamobrem si agatur AN parallela CP, & occurrens QD in N, angulus ANQ erit rectus, & triangula AQN, PCK similia; adeoque PC. KC :: AQ. AN. Unde cum AQ sit $\overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$, AN erit $\overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2PC}$. Produc AN ad M ut sit $NM = AN$, & erit $AD = DM$, adeoque circulus quæsitus transibit per punctum M. Cum ergo punctum M datum sit, ex his, sine ulteriori Analysi, talis emergit Problematis resolutio.

In AB cape AP, quæ sit ad AB ut CT ad BR; junge CP eique parallelam age AM, quæ sit ad $\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}$, ut CT ad PC: & ope *Prob.* 45. per puncta A & M describe circulum AIHM qui tangat alterutrum circulorum TIV, RHS, & idem circulus tanget utrumque. Q. E. F.

Et

Et hinc circulus etiam describi potest qui tres circulos positione & magnitudine datos continget. Sunto trium datorum circulorum radii A, B, C, & centra D, E, F. Centris E & F, radiis B $\pm$ A, C $\pm$ A describantur duo circuli, & tertius circulus qui hosce tangat, transeatque per punctum D. Sit hujus radius G, & centrum H, & eodem centro H radio G $\pm$ A descriptus circulus continget tres primos circulos, ut fieri oportuit.

PROB. XLVIII.

Si ad extremitates fili D A E circa paxillum A labentis appendantur pondera duo D & E, quorum pondus E labitur per lineam obliquam B G: Invenire locum ponderis E, ubi pondera hæc in æquilibrio consistunt.

PUta factum, & ipsi AD age parallelam EF quæ sit ad A E, ut pondus E ad pondus D. Et à punctis A & F ad lineam BG demitte perpendicula AB, FG. Jam cum pondera ex Hypothesi sint ut lineæ AE, EF, exponantur pondera per lineas istas, pondus D per lineam AE, & pondus E per lineam E F. Ergo Corpus E proprii ponderis vi directa E F tendit versus F, & vi obliqua EG tendit versus G. Et idem Corpus E, ponderis D vi directa A E, trahitur versus A, & vi obliqua BE, trahitur versus B. Cum itaque pondera se mutuo sustineant in æquilibrio, vis qua pondus E trahitur versus B æqualis esse debet vi contrariæ qua tendit versus G, hoc est B E æqualis esse debet ipsi E G. Jam vero datur ratio AE ad EF ex

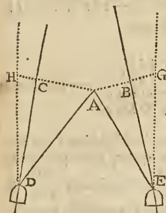
 Hypo-

Hypothesi, & propter datum angulum FEG datur etiam ratio FE ad EG cui BE æqualis est. Ergo

datur ratio AE ad BE. Datur etiam AB longitudine. Et inde triangulum ABE, & punctum E facile dabitur. Nempe dic $AB = a$, $BE = x$, & erit $AE = \sqrt{aa + xx}$, sit insuper AE ad BE in data ratione d ad e, & erit $e\sqrt{aa + xx} = dx$. Et partibus æquationis quadratis & reductis, $eeaa = ddxx - eexx$, sive $\frac{ea}{\sqrt{dd - ee}} = x$. Inventa est igitur longitudo BE quæ determinat locum ponderis E. Q. E. F.

Quod si pondus utrumque per lineam obliquam descendat, Computum sic institui potest. Sint CD, BE obliquæ lineæ positione datæ per quas pondera ista D & E descendunt. A paxillo A ad has lineas demitte perpendicula AC, AB, iisque productis occurrant in punctis G & H lineæ EG, DH,

DH, à ponderibus perpendiculariter ad Horizontem erectæ, & vis qua pondus E conatur descendere juxta lineam perpendicularem, hoc est tota gravitas ipsius E erit ad vim qua pondus idem conatur descendere juxta lineam obliquam BE ut GE ad BE, atque vis qua conatur juxta lineam istam obliquam BE descendere erit ad vim qua conatur juxta lineam AE descendere, hoc est ad vim qua filum AE distenditur ut BE ad AE. Adeoque gravitas ipsius E, erit ad tensionem fili AE ut GE ad AE. Et eadem ratione gravitas ipsius D erit ad tensionem fili AD ut HD ad AD. Sit itaque fili totius DA + AE longitudo c, sitque pars ejus $AE = x$, & erit altera pars $AD = c - x$. Et quoniam est $AEq - ABq = BEq$, & $ADq - ACq = CDq$, sit insuper $AB = a$, & $AC = b$, & erit $BE = \sqrt{xx - aa}$ & $CD = \sqrt{xx - 2cx + cc - bb}$. Adhæc cum triangula BEG, CDH, dentur specie, sit $BE . EG :: f . E$, & $CD . DH :: f . g$, & erit $EG = \frac{E}{f}\sqrt{xx - aa}$, & $DH = \frac{g}{f}\sqrt{xx - 2cx + cc - bb}$



Quamobrem cum sit GE . AE :: pondus E . tensionem AE. Et HD . AD :: pondus D . tensionem AD, & tensiones istæ æquentur inter se, erit

$\frac{E}{f}\frac{Ex}{\sqrt{xx - aa}}$ = tensioni AE = tensioni AD

$= \dfrac{Dc - Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{xx - 2cx + cc - bb}}$. Cujus æquationis reductione provenit $gx\sqrt{xx - 2cx + cc - bb} = \overline{Dc - Dx}\sqrt{xx - aa}$, sive

$$\begin{array}{c} gg \\ -DD \end{array} x^4 \begin{array}{c} -2ggc \\ +2DDc \end{array} x^3 \begin{array}{c} +ggcc \\ -ggbb \\ -DDcc \\ +DDaa \end{array} xx - 2DDcaax$$

$+ DDccaa = 0$.

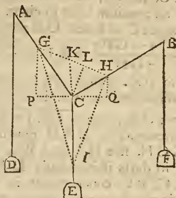
Si casum desideras quo hoc Problema per Regulam & circinum construi queat, pone pondus D ad pondus E ut ratio $\frac{BE}{EG}$ ad rationem $\frac{CD}{DH}$, & evadet $g = D$, adeoque vice præcedentis æquationis habebitur hæc $\begin{array}{c} aa \\ -bb \end{array} xx - 2aacx + aacc = 0$; sive $x = \dfrac{ac}{a+b}$.

PROB. XLIX.

Si ad filum D A C B F circa paxillos duos A, B, labile appendantur tria pondera D, E, F; D & F ad extremitates fili & E ad medium ejus punctum C, inter paxillos positum: Ex datis ponderibus & situ paxillorum invenire situm puncti C, ad quod medium pondus appenditur ubi pondera consistunt in æquilbrio.

CUM tensio fili AC æquetur tensioni fili AD, & tensio fili BC tensioni fili BF, tensiones filorum AC, BC, EC erunt ut pondera D, F, E. In

In eadem ponderum ratione cape partes filorum CG, CH, CI. Compleatur triangulum GHI. Produc IC donec ea occurrat GH in K, & erit GK = KH, & CK = $\frac{1}{2}$CI, adeoque C centrum gravitatis trianguli GHI. Nam per C agatur ipsi CE perpendiculare PQ, & huic a punctis G & H perpendicularia GP, HQ. Et si vis qua filum AC vi ponderis D trahit punctum C versus A, exponatur per lineam GC, vis qua filum istud trahet idem punctum versus P exponetur per lineam CP, & vis qua trahit illud versus K exponetur per lineam GP. Et similiter vires quibus filum BC vi ponderis F, trahit idem punctum C versus B, Q & K, exponentur per lineas CH, CQ, HQ; & vis qua filum CE vi ponderis E, trahit punctum illud C versus E, exponetur per lineam CI. Jam cum punctum C viribus æquipollentibus sustineatur in æquilibrio, summa virium quibus fila AC & BC, simul trahunt punctum C versus K, æqualis erit vi contrariæ qua filum EC, trahit punctum illud versus E, hoc est summa GP + HQ, æqualis erit ipsi CI; & vis qua filum AC trahit punctum C versus P, æqualis erit vi contrariæ qua filum BC, trahit idem punctum C versus Q, hoc est linea PC æqualis lineæ CQ. Quare cum PG, CK & QH parallelæ sint, erit etiam



$$GK = KH, \ \& \ CK \left(= \frac{GP + HQ}{2}\right) = \tfrac{1}{2}CI.$$

N 4 Quod

Quod erat ostendendum. Restat itaque triangulum GCH determinandum, cujus latera GC & HC, dantur, una cum linea CK, quæ à vertice C ad medium basis ducitur. Demittatur itaque à vertice C ad basem GH perpendiculum CL, & erit

$$\frac{GCq - CHq}{2\,GH} = KL = \frac{GCq - KCq - GKq}{2\,GK}.$$

Pro 2GK scribe GH, & rejecto communi divisore GH, & ordinatis terminis, erit $GCq - 2\,KCq + CHq = 2\,GKq$, sive $\sqrt{\tfrac{1}{2}GCq - KCq + \tfrac{1}{2}CHq} = GK$. Invento GK vel KH, dantur simul anguli GCK, KCH, sive DAC, FBC. Quare à punctis A & B in datis istis angulis DAC, FBC duc lineas AC, BC concurrentes in puncto C, & istud C erit punctum quod quæritur.

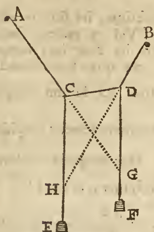
Cæterum quæstiones omnes quæ sunt ejusdem generis non semper opus est per Algebram sigillatim solvere, sed ex solutione unius plerumque consectatur solutio alterius. Ut si jam proponeretur hæc quæstio.

Filo ACDB in datas partes AC, CD, DB diviso & extremitatibus ejus ad paxillos duos A, B positione datos ligatis, si ad puncta divisionum C ac D appendantur pondera duo E & F; ex dato pondere F, & situ punctorum C ac D, cognoscere pondus E.

Ex præcedentis Problematis solutione satis facile colligetur hæcce solutio hujus. Produc lineas AC, BD, donec occurrant lineis DF, CE in G & H; & erit pondus E ad pondus F ut DG ad CH.

Et

Et hinc obiter patet ratio componendi ſtate-



ram ex ſolis filis, qua pondus corporis cujuſvis E, ex unico dato pondere F cognoſci poteſt.

PROB. L.

Lapide in puteum decidente, ex ſono lapidis fundum percutientis, altitudinem putei cognoſcere.

SIT altitudo putei x, & ſi lapis motu uniformiter accelerato deſcendat per ſpatium quodlibet datum a in tempore dato b, & ſonus motu uniformi tranſeat per idem ſpatium datum a in tempore dato d, lapis deſcendet per ſpatium x, in tempore $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, ſonus autem qui fit à lapide in fundum putei impingente aſcendet per idem ſpatium x, in

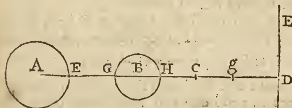
in tempore $\frac{dx}{a}$. Ut enim sunt spatia gravibus decidentibus descripta, ita sunt quadrata temporum descensus. Vel ut radices spatiorum, hoc est ut $\sqrt{x}$ & $\sqrt{a}$, ita sunt ipsa tempora. Et ut spatia x & a, per quæ sonus transit, ita sunt tempora transitus. Ex horum temporum $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ & $\frac{dx}{a}$ summa, conflatur tempus à lapide demisso ad sonus reditum. Hoc tempus ex observatione cognosci potest. Sit ipsum t, & erit $b\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{dx}{a} = t$. Ac $b\sqrt{\frac{x}{a}} = t - \frac{dx}{a}$. Et partibus quadratis $\frac{bbx}{a} = tt - \frac{2tdx}{a} + \frac{ddxx}{aa}$. Et per reductionem $xx = \frac{2adt + abb}{dd}x - \frac{aatt}{dd}$. Et extracta radice $x = \frac{adt + \frac{1}{2}abb}{dd} - \frac{ab}{2dd}\sqrt{bb + 4dt}$.

PROB.

PROB. LI.

Dato globo A, positione parietis DE, & centri globi B à pariete distantia BD; invenire molem globi B ea lege ut in spatiis liberis, & vi gravitatis destitutis, si globus A, cujus centrum in linea BD, quæ ad parietem perpendicularis est, ultra B producta consistit, uniformi cum motu versus D feratur donec is impingat in alterum quiescentem globum B; globus iste B postquam reflectitur à pariete, denuo occurrat globo A in dato puncto C.

SIT globi A celeritas ante reflectionem a & erit per PROB. XII. p. 92. celeritas globi A post reflexionem $= \frac{aA - aB}{A + B}$, & celeritas globi B post reflexionem $= \frac{2aA}{A + B}$. Ergo celeritas globi A ad celeritatem globi B est ut $A - B$ ad $2A$. In GD cape $gD = GH$ diametro nempe globi B, & cele-



ritates istæ erunt ut GC ad $Gg + gC$. Nam ubi Globus A impegit in globum B, punctum G quod in superficie globi B existens movetur in linea AD, perget per spatium Gg antequam globus ille B impinget in parietem, & per spatium gC postquam à pariete

pariete reflectitur; hoc est per totum spatium $Gg + gC$, in eodem tempore quo globi A punctum F perget per spatium GC, eo ut globus uterque rursus conveniant & in se mutuo impingant in puncto dato C. Quamobrem cum dentur intervalla BC & CD, dic $BC = m$, $BD + CD = n$, & $BG = x$, & erit $GC = m + x$, & $Gg + gC = GD + DC - 2gD = GB + BD + DC - 2GH = x + n - 4x$, seu $= n - 3x$. Supra erat $A - B$ ad $2A$ ut celeritas globi A ad celeritatem globi B, & celeritas globi A ad celeritatem globi B ut GC ad $Gg + gC$, adeoque $A - B$ ad $2A$ ut GC ad $Gg + gC$, ergo cum sit $GC = m + x$, & $Gg + gC = n - 3x$, erit $A - B$ ad $2A$ sicut $m + x$ ad $n - 3x$. Porro globus A est ad globum B ut cubus radii ejus AF ad cubum radii alterius GB, hoc est si ponas radium AF esse s, ut s^3 ad x^3. Ergo $s^3 - x^3 . 2s^3 (:: A - B . 2A) :: m + x . n - 3x$. Et ductis extremis & mediis in se habebitur æquatio $s^3 n - 3s^3 x - nx^3 + 3x^4 = 2ms^3 + 2xs^3$. Et per reductionem $3x^4 - nx^3 - 5s^3 x \begin{matrix} + s^3 n \\ - 2s^3 m \end{matrix} = 0$. Cujus æquationis constructione dabitur globi B semidiameter x; quo dato datur etiam Globus ille. Q. E. F.

Nota vero quod ubi punctum C jacet ad contrarias partes globi B, debet signum quantitatis $2m$ mutari, & scribi $3x^4 - nx^3 - 5s^3 x \begin{matrix} + s^3 n \\ + 2s^3 m \end{matrix} = 0$.

Si datus esset Globus B & quæreretur Globus A ea lege ut globi duo post reflexionem convenirent in C, quæstio foret facilior. Nempe in inventa æquatione novissima supponendum esset x dari & s quæri. Qua ratione per debitam reductionem illius æquationis, translatis terminis $- 5s^3 x + s^3 n - 2s^3 m$ ad æquationis partem contrariam ac divisa utraque parte per $5x - n + 2m$, emergeret

$3x^4 -$

$\frac{3x^4 - nx^3}{5x - n + 2m} = s^3$. Ubi per ſolam extractionem radicis cubicæ obtinebitur s.

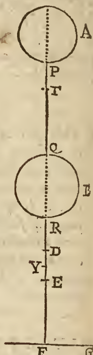
Quod ſi dato Globo utroq; quæreretur punctum C in quo poſt reflexionem ambo in ſe mutuo impingerent: Cum ſupra fuerit $A - b$ ad $2A$ ut GC ad $Gg + gC$ ergo invertendo & componendo $3A - B$ erit ad $A - B$ ut $2Gg$ ad diſtantiam quæſitam GC.

PROB. LII.

Si globi duo A & B tenui jungantur filo PQ, & pendente globo B à globo A, ſi demittatur globus A, ita ut globus uterque ſimul ſola gravitatis vi in eadem linea perpendiculari PQ cadere incipiat; dein globus inferior B, poſtquam à fundo ſeu plano horizontali FG ſurſum reflectitur, ſuperiori decidenti globo A occurrat in puncto quodam D: Ex data fili longitudine PQ, & puncti illius D à fundo diſtantia DF, invenire altitudinem PF, à qua globus ſuperior A ad hunc effectum demitti debet.

SIT fili PQ longitudo a. In perpendiculo PQRF ab F ſurſum cape FE æqualem globi inferioris diametro QR, ita ut cum globi illius punctum infimum R incidit in fundum ad F, punctum ejus ſupremum Q occupet locum E; ſitque ED diſtantia per quam globus ille poſtquam à fundo reflectitur aſcendendo tranſit antequam globo ſuperiori decidenti occurrat in puncto D. Igitur ob datam puncti D à fundo diſtantiam DF, globique inferioris diametrum EF, dabitur eorum differentia DE. Sit ea $= b$. Sitque altitudo per quam globus ille inferior antequam impingit in fundum

fundum cadendo describit R F vel Q E $= x$, siquidem ea ignoretur. Et invento x si eidem addantur E F & P Q habebitur altitudo P F, à qua globus superior ad effectum desideratum demitti debet.



Cum igitur sit $PQ = a$, & $QE = x$, erit $PE = a + x$. Aufer D E seu b, & restabit $PD = a + x - b$. Est autem tempus descensus globi A ut radix spatii cadendo descripti seu $\sqrt{a + x - b}$, & tempus descensus globi alterius B ut radix spatii cadendo descripti, seu $\sqrt{x}$, & tempus ascensus ejusdem ut differentia radicis illius & radicis spatii quod cadendo tantum à Q ad D describeretur. Nam hæc differentia est ut tempus descensus à D ad E, quod æquale est tempori ascensus ab E ad D. Est autem differentia illa $\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Unde tempus descensus & ascensus conjunctim erit ut $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Quamobrem cum hoc tempus æquetur tempori descensus globi superioris erit $\sqrt{a + x - b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Cujus æquationis partibus quadratis habebitur $a + x - b = 5x - b - 4\sqrt{xx - bx}$, seu $a = 4x - 4\sqrt{xx - bx}$, & ordinata æquatione $4x - a = 4\sqrt{xx - bx}$. Cujus partes iterum quadrando oritur $16xx - 8ax + aa = 16xx - 16bx$, seu $aa = 8ax - 16bx$. Et divisis omnibus per $8a - 16b$, fiet $\frac{aa}{8a - 16b} = x$. Fac igitur ut $8a - 16b$ ad a ita a ad x, & habebitur x seu Q E. Q. E. I.

Quod

Quod si ex dato QE quæreretur fili longitudo PQ seu a; eadem æquatio $aa = 8ax - 16bx$ extrahendo affectam radicem quadraticam daret $a = 4x - \sqrt{16xx - 16bx}$. Id est si sumas QY mediam proportionalem inter QD & QE, erit PQ = 4EY. Nam media illa proportionalis erit $\sqrt{x \times \overline{x-b}}$, seu $\sqrt{xx - bx}$ quod subductum de x, seu QE relinquit EY, cujus quadruplum est $4x - 4\sqrt{xx - bx}$.

Sin vero ex datis tum QE seu x tum fili longitudine PQ seu a, quæreretur punctum D in quo globus superior in inferiorem incidit; puncti illius à dato puncto E distantia DE seu b, è præcedente æquatione $aa = 8ax - 16bx$, eruetur transferendo aa & $16bx$ ad æquationis partes contrarias cum signis mutatis, & omnia dividendo per $16x$. Orietur enim $\frac{8ax - aa}{16x} = b$. Fac igitur ut $16x$, ad $8x - a$ ita a ad b, & habebitur b seu DE.

Hactenus suppofui globos tenui filo connexos simul dimitti. Quod si nullo connexi filo diversis temporibus dimittantur, ita ut globus superior A verbi gratia prius dimissus, descenderit per spatium PT antequam globus alter incipiat cadere, & ex datis distantiis PT, PQ ac DE quæratur altitudo PF à qua globus superior dimitti debet ea lege ut in inferiorem incidat ad punctum D; sit PQ $= a$, DE $= b$, PT $= c$, & QE $= x$, & erit PD $= a + x - b$ ut supra. Et tempora quibus globus superior cadendo describat spatia PT ac TD, & globus inferior prius cadendo dein reascendendo describat summam spatiorum QE + ED erunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{PD} - \sqrt{PT}$, & $2\sqrt{QE} - \sqrt{QD}$ hoc est ut $\sqrt{c}$, $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c}$, & $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. At ultima duo tempora, propterea quod spatia TD, & QE+ED simul

simul describuntur, æqualia sunt. Ergo $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Et partibus quadratis $a + c - 2\sqrt{ca + cx - cb} = 4x - 4\sqrt{xx - bx}$. Pone $a + c = e$, & $a - b = f$, & erit per debitam reductionem $4x - e + 2\sqrt{cf + cx} = 4\sqrt{xx - bx}$, & partibus quadratis $ee - 8ex + 16xx + 4cf + 4cx + \overline{16x - 4e}\sqrt{cf + cx} = 16xx - 16bx$. Ac deletis utrobique $16xx$ & pro $ee + 4cf$ scripto m nec non pro $8e - 16b - 4c$ scripto n, habebitur per debitam reductionem $\overline{16x - 4e}\sqrt{cf + cx} = nx - m$. Et partibus quadratis $256cfxx + 256cx^3 - 128cefx - 128cexx + 16ceef + 16ceex = nnxx - 2mnx$ $\begin{matrix} \\ +256cf \end{matrix}$ $+ mm$. Et ordinata æquatione

$$256cx^3 \begin{matrix} -128ce \\ -nn \end{matrix} xx \begin{matrix} -128cef \\ +16ceex \\ +2mn \end{matrix} \begin{matrix} +16ceef \\ -mm \end{matrix} = 0.$$

Cujus æquationis constructione dabitur x seu QE, cui si addas datas distantias PQ, & EF habebitur altitudo PF quam oportuit invenire.

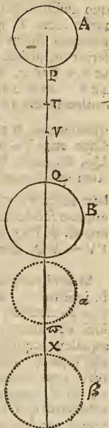
PROB. LIII.

Si globi duo quiescentes superior A, & inferior B diversis temporibus dimittantur; & globus inferior eo temporis momento cadere incipiat ubi superior cadendo jam descripsit spatium PT; invenire loca α, β quæ globi illi cadentes occupabunt ubi eorum intervallum ϖχ dato æquale est.

CUM dentur distantiæ PT, PQ, & $\varpi\chi$ dic primam a, secundam b, tertiam c, & pro Pϖ seu spatio quod globus superior antequam pervenit ad

locum

locum quæsitum α cadendo describit ponatur x. Jam tempora quibus globus superior describit spatia PT, $P\varpi$, $T\varpi$, & inferior spatium $Q\chi$ sunt, ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\varpi}$, $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$, & $\sqrt{Q\chi}$. Quorum temporum posteriora duo, eo quod globi cadendo simul describant spatia $T\varpi$ & $Q\chi$, sunt æqualia. Unde & $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$ æquale erit $\sqrt{Q\chi}$. Erat $P\varpi = x$, & $PT = a$; & ad $P\varpi$ addendo $\varpi\chi$ seu c & à summa auferendo PQ seu b habebitur $Q\chi = x + c - b$. Quamobrem his substitutis fiet $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{x + c - b}$. Et æquationis partibus quadratis orietur $x + a - 2\sqrt{ax} = x + c - b$. Ac deleto utrobique x, & ordinata æquatione habebitur $a + b - c = 2\sqrt{ax}$. Et partibus quadratis erit quadratum de $a + b - c$ æquale $4ax$, & quadratum illud divisum per $4a$ æquale x, seu $4a$ ad $a + b - c$ sicut $a + b - c$ ad x. Ex invento autem x seu $P\varpi$ datur globi superioris decidentis locus quæsitus α. Et per locorum distantiam simul datur etiam locus inferioris β.



Et hinc si punctum quæratur ubi globus superior cadendo tandem impinget in inferiorem; ponendo distantiam $\varpi\chi$ nullam esse seu delendo c, dic $4a$ ad $a + b$ ut $a + b$ ad x, seu $P\varpi$, & punctum ϖ erit quod quæris.

Et viciſſim ſi detur punctum illud ϖ vel χ in quo globus ſuperior incidit in inferiorem, & quæratur locus T quem ſuperioris globi decidentis punctum imum P tunc occupabat cum globus inferior incipiebat cadere; quoniam eſt $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x, ſeu ductis extremis & mediis in ſe $4ax = aa + 2ab + bb$, & per æquationis debitam ordinationem $aa = 4ax - 2ab - bb$; extrahe radicem quadraticam & proveniet $a = 2x - b - 2\sqrt{xx - bx}$. Cape ergo $V\varpi$ mediam proportionalem inter $P\varpi$ & $Q\varpi$, & verſus V cape $VT = VQ$, & erit T punctum quod quæris. Nam $V\varpi$ erit $= \sqrt{P\varpi \times Q\varpi}$ hoc eſt $= \sqrt{x \times \overline{x-b}}$ ſeu $= \sqrt{xx - bx}$; cujus duplum ſubductum de $2x - b$, ſeu de $2P\varpi - PQ$, hoc eſt de $PQ + 2Q\varpi$ relinquit $PQ - 2VQ$ ſeu $PV - VQ$, hoc eſt PT.

Si denique globorum, poſtquam ſuperior incidit in inferiorem, & impetu in ſe invicem facto inferior acceleratur, ſuperior retardatur, deſiderantur loci ubi inter cadendum diſtantiam datæ rectæ æqualem acquirent: Quærendus erit primo locus ubi ſuperior impingit in inferiorem; dein ex cognitis tum magnitudinibus globorum tum eorum ubi in ſe impingunt celeritatibus inveniendæ ſunt celeritates quas proxime poſt reflexionem habebunt, idque per modum PROB. XII. pag. 92. Poſtea quærenda ſunt loca ſumma ad quæ globi celeritatibus hiſce ſi ſurſum ferantur aſcenderent, & inde cognoſcentur ſpatia quæ globi datis temporibus poſt reflexionem cadendo deſcribent, ut & differentia ſpatiorum: & viciſſim ex aſſumpta illa differentia, per Analyſin regredictur ad ipſa ſpatia cadendo deſcripta.

Ut ſi globus ſuperior incidit in inferiorem ad punctum ϖ, & poſt reflexionem celeritas ſuperioris deor-

deorsum tanta sit, ut si sursum esset ascendere faceret globum illum per spatium ϖN, & inferioris celeritas deorsum tanta esset, ut si sursum esset, ascendere faceret globum illum inferiorem per spatium ϖM; tum tempora quibus globus superior vicissim descenderet per spatia $N\varpi$, NG, & inferior per spatia $M\varpi$, MH, forent ut $\sqrt{N\varpi}$, $\sqrt{NG}$, $\sqrt{M\varpi}$, $\sqrt{MH}$, adeoque tempora quibus globus superior conficeret spatium ϖG, & inferior spatium ϖH, forent ut $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi}$, ad $\sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$. Pone hæc tempora æqualia esse, & erit $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi} = \sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$. Et insuper cum detur distantia GH pone $\varpi G + GH = \varpi H$. Et harum duarum æquationum reductione solvetur problema. Ut si sit $M\varpi = a$, $N\varpi = b$, $GH = c$, $\varpi G = x$; erit juxta posteriorem æquationem $x + c = \varpi H$. Adde $M\varpi$ fiet $MH = a + c + x$. Ad ϖG adde $N\varpi$, & fiet $NG = b + x$. Quibus inventis, juxta priorem æquationem erit $\sqrt{b + x} - \sqrt{b} = \sqrt{a + c + x} - \sqrt{a}$. Scribatur e pro $a + c$, & $\sqrt{f}$ pro $\sqrt{a} - \sqrt{b}$: & æquatio fiet $\sqrt{b + x} = \sqrt{e + x} - \sqrt{f}$. Et partibus quadratis $b + x = e + x + f - 2\sqrt{ef + fx}$, seu $e + f - b = 2\sqrt{ef + fx}$. Pro $e + f - b$ scribe g, & fiet $g = 2\sqrt{ef + fx}$, & partibus quadratis $gg = 4ef + 4fx$, & per reductionem $\frac{gg}{4f} - e = x$.

M

N

ϖ

G

H

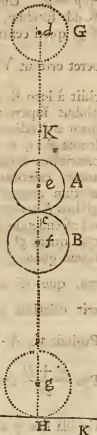
PROB. LIV.

Si duo sint globi A, B quorum superior A ab altitudine G decidens, in alterum inferiorem B à fundo H versus superiora resilientem incidat, & hi globi ita per reflexionem ab invicem denuo recedant ut globus A vi reflexionis illius ad altitudinem priorem G redeat, idque eodem tempore quo globus inferior B ad fundum H revertitur; dein globus A rursus decidat, & in globum B à fundo resilientem denuo incidat, idque in eodem loco AB ubi prius in ipsum incidebat; & sic perpetuo globi ab invicem resiliant rursusque ad eundem locum redeant: Ex datis globorum magnitudinibus, positione fundi & loco G à quo globus superior decidit, invenire locum ubi globi in se mutuo impingent.

SIT *e* centrum globi A, & *f* centrum globi B, *d* centrum loci G in quo globus superior in maxima est altitudine, *g* centrum loci globi inferioris ubi in fundum impingit, *a* semidiameter globi A, *b* semidiameter globi B, *c* punctum contactus globorum in se mutuo impingentium, & H punctum contactus globi inferioris & fundi. Et celeritas globi A, ubi in globum B impingit, ea erit quæ generatur casu globi ab altitudine de, adeoque est ut $\sqrt{de}$. Hac eadem celeritate reflecti debet globus A versus superiora ut ad locum priorem G redeat. Et globus B eadem celeritate deorsum reflecti debet qua ascenderat ut eodem tem-

poro

pore redeat ad fundum quo inde recesserat. Ut autem hæc duo eveniant, globorum motus inter reflectendum æquales esse debent. Motus autem ex globorum celeritatibus & magnitudinibus componuntur, adeoque quod fit ex globi unius mole & celeritate æquale erit ei quod fit ex globi alterius mole & celeritate. Unde si factum ex unius globi mole & celeritate dividatur per molem alterius globi, habebitur celeritas alterius globi proxime ante & post reflexionem, seu sub fine ascensus & initio descensus. Erit igitur hæc celeritas ut $\frac{A\sqrt{de}}{B}$, seu cum globi sint ut cubi radiorum ut $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Ut autem hujus celeritatis quadratum ad quadratum celeritatis globi A proxime ante reflexionem, ita altitudo ad quam globus B hac celeritate, si occursu gobi A in eum decidentis non impediretur, ascenderet, ad altitudinem ed à qua globus A descendit. Hoc est ut $\frac{Aq}{Bq}\,de$ ad de seu ut Aq ad Bq vel a^6 ad b^6 ita altitudo illa prior ad x, si modo pro altitudine posteriore cd ponatur x. Ergo hæc altitudo, ad quam nimirum B si non impediretur ascenderet, est $\frac{a^6}{b^6}\,x$. Sit ea fK. Ad fK adde fg, seu dH $-$ de $-$ ef $-$ gH, hoc est $p - x$ si modo pro dato dH $-$ ef $-$ gH scribas p,



& x pro incognito de & habebitur $Kg = \frac{a^6}{b^6}x + p - x$. Unde celeritas globi B ubi decidit à K ad fundum, hoc est ubi decidit per spatium Kg, quod centrum ejus inter decidendum describeret erit ut $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x + p - x}$. At globus ille decidit à loco Bcf ad fundum eodem tempore quo globus superior A ascendit à loco Ace ad summam altitudinem d, aut vicissim descendit à d ad locum Ace, & proinde cum gravium cadentium celeritates æqualibus temporibus æqualiter augeantur, celeritas globi B descendendo ad fundum tantum augebitur quanta est celeritas tota quam globus A eodem tempore cadendo à d ad e acquirat vel ascendendo ab e ad d amittat. Ad celeritatem itaque quam globus B habet in loco Bcf adde celeritatem quam globus A habet in loco Ace, & summa, que est ut $\sqrt{de} + \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, seu $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$, erit celeritas globi B ubi is in fundum incidit. Proinde $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$ æquabitur $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x + p - x}$. Pro $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$ scribe $\frac{r}{s}$ & pro $\frac{a^6 - b^6}{b^6}$, $\frac{rt}{ss}$ & æquatio illa fiet $\frac{r}{s}\sqrt{x} = \sqrt{\frac{rt}{ss}x + p}$, & partibus quadratis $\frac{rr}{ss}x = \frac{rt}{ss}x + p$. Aufer utrobique $\frac{rt}{ss}x$, duc omnia in ss ac divide per $rr - rt$, & orietur $x = \frac{ssp}{rr - rt}$. Quæ quidem æquatio prodiisset

sim-

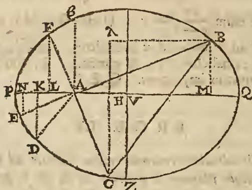
ſimplicior ſi modo aſſumpſiſſem $\frac{p}{s}$ pro $\frac{a^3+b^3}{b^3}$, prodiiſſet enim $\frac{ss}{p-t}=x$. Unde faciendo ut ſit $p-t$ ad s ut s ad x habebitur x ſeu ed; cui ſi addas ec habebitur dc, & punctum c in quo globi in ſe mutuo impingent. Q. E. F.

PROB. LV.

Erectis alicubi terrarum tribus baculis ad Horizontale planum in punctis A, B, & C perpendicularibus, quorum is qui in A ſit ſex pedum, qui in B octodecim pedum, & qui in C octo pedum, exiſtente linea AB triginta trium pedum; contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A, tranſire per puncta B & C, baculi autem B per A & C, ac baculi C per punctum A. Quæritur declinatio ſolis & elevatio Poli, ſive dies locuſque ubi hæc evenerint?

QUoniam umbra baculi cujuſque deſcripſit Conicam ſectionem, ſectionem nempe Coni radioſi cujus vertex eſt baculi ſummitas; fingam BCDEF, eſſe hujuſmodi curvam (ſive ea ſit Hyperbola, Parabola vel Ellipſis) quam umbra baculi A eo die deſcripſit, ponendo AD, AE, AF ejus umbras fuiſſe cum BC, BA, CA reſpective fuerunt umbræ baculorum B & C. Et præterea fingam PAQ eſſe lineam Meridionalem ſive axem hujus curvæ ad quem demiſſæ perpendiculares BM, CH, DK, EN, & FL, ſunt ordinatim applicatæ. Has vero ordinatim applicatas indefinite deſignabo litera y, & axis partes interceptas AM, AH, AK,

AN, & AL litera *x*. Fingam denique æquationem



$aa \perp bx \perp cxx = yy$, ipsarum x & y relationem (*i. e.* naturam Curvæ) designare, assumendo aa, b & c tanquam cognitas ut ex Analysi tandem inveniantur. Ubi incognitas quantitates x & y, duarum tantum dimensionum posui quia æquatio est ad Conicam sectionem; & ipsius y dimensiones impares omisi quia ipsa est ordinatim applicata ad axem. Signa autem ipsorum b & c, quia indeterminata sunt designavi notula $\perp$ quam indifferenter pro $+$ aut $-$ usurpo, & ejus oppositum $\top$ pro signo contrario. At signum quadrati aa affirmativum posui, quia baculum A umbras in adversas plagas (C & F, B & E) projicientem concava pars curvæ necessario complectitur, & proinde si ad punctum A erigatur perpendiculum Aβ, hoc alicubi occurret curvæ puta in β, hoc est, ordinatim applicata y, ubi x nullum est, erit reale. Nam inde sequitur quadratum ejus, quod in eo casu est aa, affirmativum esse.

Constat itaque quod æquatio hæc fictitia $aa \perp bx \perp cxx = yy$, sicut terminis superfluis non referta sic neque restrictor est quam ut ad omnes hujus pro-

problematis conditiones se extendat, Hyperbolam, Ellipsin vel Parabolam quamlibet designatura prout ipsorum aa, b, c, valores determinabuntur, aut nulli forte reperientur. Quid autem valent, quibusque signis b & c debent affici, & inde quænam sit hæc curva ex sequenti Analysi constabit.

Analyseos pars prior.

Cum umbræ sint ut altitudines baculorum erit BC. AD :: AB. AE (:: 18. 6.) :: 3. 1. Item CA. AF (:: 8. 6.) :: 4. 3. Quare nominatis $AM = r$, $MB = s$, $AH = t$, & $HC = + v$. Ex similitudine triangulorum AMB, ANE, & AHC, ALF erunt $AN = -\frac{r}{3}$, $NE = -\frac{s}{3}$. $AL = -\frac{3t}{4}$. Et $LF = +\frac{3v}{4}$: Quarum signa signis ipsarum AM, MB, AH, HC contraria posui quia tendunt ad contrarias plagas respectu puncti A à quo ducuntur, axisve PQ cui insistunt. His autem pro x & y in æquatione fictitia $aa + bx + cxx = yy$, respective scriptis,

r & s dabunt $aa + br + crr = ss$.
$-\frac{r}{3}$ & $-\frac{s}{3}$ dabunt $aa - \frac{br}{3} + \frac{1}{9}crr = \frac{1}{9}ss$.
t & $+ v$ dabunt $aa + bt + ctt = vv$.
$-\frac{3}{4}t$ & $+\frac{3}{4}v$ dabunt $aa - \frac{3}{4}bt + \frac{9}{16}ctt = \frac{9}{16}vv$.

Jam è prima & secunda harum exterminando ss ut obtineatur r, prodit $\frac{2aa}{+b} = r$. Unde patet $+b$ esse affirmativum. Item è tertia & quarta exterminando vv ut obtineatur t prodit $\frac{aa}{3b} = t$. Et scriptis in-

super

ſuper $\frac{2aa}{b}$ pro r in prima, & $\frac{aa}{3b}$ pro t in tertia, oriuntur $3aa \perp \frac{4a^4c}{bb} = ss$, & $\frac{4}{3}aa \perp \frac{a^4c}{9bb} = vv$.

Porro demiſſa Bλ perpendiculari in CH, erit BC. AD (:: 3. 1.) :: Bλ. A K :: Cλ. D K. Quare cum ſit Bλ $(= AM - AH = r - t) = \frac{5aa}{3b}$, erit AK $= \frac{5aa}{9b}$, vel potius $= -\frac{5aa}{9b}$. Item cum ſit Cλ $(= CH \perp BM = v \perp s) = \sqrt{\frac{4aa}{3} \perp \frac{a^4c}{9bb}} \perp \sqrt{3aa \perp \frac{4a^4c}{bb}}$, erit DK $(= \frac{1}{3}C\lambda) = \sqrt{\frac{4aa}{27} \perp \frac{a^4c}{81bb}} \perp \sqrt{\frac{1}{3}aa \perp \frac{4a^4c}{9bb}}$. Quibus in æquatione $aa + bx \perp cxx = yy$, pro AK ac DK ſive x, & y reſpective ſcriptis, prodit $\frac{4aa}{9} \perp \frac{25a^4c}{81bb} = \frac{13}{27}aa \perp \frac{37a^4c}{81bb} \perp 2\sqrt{\frac{4aa}{27} \perp \frac{a^4c}{81bb}} \times \sqrt{\frac{aa}{3} \perp \frac{4a^4c}{9bb}}$. Et per reductionem $-bb \mp 4aac = \perp 2\sqrt{36b^4 \perp 51aabbc + 4a^4cc}$, & partibus quadratis iterumque reductis, exit $o = 143b^4 \perp 196aabbc$, ſive $\frac{-143bb}{196aa} = \perp c$. Unde conſtat $\perp c$ negativam eſſe, adeoque æquationem fictitiam $aa \perp bx \perp cxx = yy$, hujus eſſe formæ $aa + bx - cxx = yy$, & ideo curvam quam deſignat Ellipſin eſſe. Ejus vero centrum & axes duo ſic eruuntur.

Ponendo $y = o$, ſicut in Figuræ verticibus P & Q contingit, habebitur $aa + bx = cxx$, & extracta

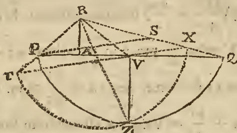
ĉta radice, $x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}} = \frac{AQ}{AP}$. Adeoque ſumpto $AV = \frac{b}{2c}$, erit V centrum Ellipſis, & VQ vel VP $\left(\sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}}\right)$ ſemiaxis maximus. Si porro ipſius AV valor $\frac{b}{2c}$ pro x in æquatione $aa + bx - cxx = yy$ ſcribatur, fiet $aa + \frac{bb}{4c} = yy$. Quare eſt $aa + \frac{bb}{4c} = VZq$, hoc eſt quadrato ſemiaxis minimi. Denique in valoribus ipſarum AV, VQ, VZ jam inventis, ſcripto $\frac{143\,bb}{196\,aa}$ pro c, exeunt $\frac{98\,aa}{143\,b} = AV$, $\frac{112\,aa\sqrt{3}}{143\,b} = VQ$, & $\frac{8\,a\sqrt{3}}{\sqrt{143}} = VZ$.

Analyſeos pars altera.

Supponatur jam baculum puncto A inſiſtens eſſe AR, & erit RPQ planum meridionale ac RPZQ conus radioſus cujus vertex eſt R. Sit inſuper TXZ planum ſecans Horizontem in VZ, ut & meridionale planum in TVX, quæ ſectio ſit ad axem mundi conive perpendicularis, & ipſum planum TXZ erit ad eundem axem perpendiculare, & conum ſecabit in peripheria circuli TZX, quæ ab ejus vertice pari ubique intervallo RX, RZ, RT diſtabit. Quamobrem ſi PS ipſi TX parallela ducatur, fiet RS = RP propter æquales RX, RT; nec non SX = XQ propter æquales PV, VQ. Unde eſt RX vel RZ $\left(= \frac{RS + RQ}{2}\right) = \frac{RP + RQ}{2}$.

Deni-

Denique ducatur RV, & cum VZ perpendiculariter insistat plano RPQ, (sectio utique existens planorum eidem perpendiculariter insistentium) fiet triangulum RVZ rectangulum ad V.



Dictis jam RA $= d$, AV $= e$, VP vel VQ $= f$, & VZ $= g$, erit AP $= f - e$, & RP $= \sqrt{ff - 2ef + ee + dd}$. Item AQ $= f + e$, & RQ $= \sqrt{ff + 2ef + ee + dd}$: adeoque RZ $\left(= \frac{RP + RQ}{2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{ff - 2ef + ee + dd} + \sqrt{ff + 2ef + ee + dd}}{2}.$$

Cujus quadratum $\frac{dd + ee + ff}{2} +$ $\frac{1}{2}\sqrt{f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4}$, est æquale $(RVq + VZq = RAq + AVq + VZq =)$ $dd + ee + gg$. Jam reductione facta est $\sqrt{f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4}$ $= dd + ee - ff + 2gg$, & partibus quadratis ac in ordinem redactis, $ddff = ddgg + eegg - ffgg + g^4$, sive $\frac{ddff}{gg} = dd + ee - ff + gg$. Denique 6, $\frac{98\,aa}{143\,b}$, $\frac{112\,aa\sqrt{3}}{143\,b}$, & $\frac{8\,a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ (valoribus ipsorum AR, AV, VQ,

VQ, & VZ) pro d, e, f, ac g restitutis, oritur $36 - \frac{196a^4}{143bb} + \frac{192aa}{143} = \frac{36 \times 14 \times 14aa}{143bb}$, & inde per reductionem $\frac{49a^4 + 36 \times 49aa}{48aa + 1287} = bb$.

In primo Schemate est $AMq + MBq = ABq$, hoc est $rr + ss = 33 \times 33$. Erat autem $r = \frac{2aa}{b}$, & $ss = 3aa - \frac{4a^4c}{bb}$, unde $rr = \frac{4a^4}{bb}$, & (substituto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c) $ss = \frac{4aa}{49}$ Quare $\frac{4a^4}{bb} + \frac{4aa}{49} = 33 \times 33$, & inde per reductionem iterum resultat $\frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4aa} = bb$. Ponendo igitur æqualitatem inter duo bb, & dividendo utramque partem æquationis per 49 fit $\frac{a^4 + 36aa}{48aa + 1287} = \frac{4a^4}{53361 - 4aa}$. Cujus partibus in crucem multiplicatis, ordinatis, ac divisis per 49, exit $4a^4 = 981aa + 39204$ cujus radix aa est $\frac{981 + \sqrt{1589625}}{8} = 280\llcorner 2254144$.

Supra inventum fuit $\frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4aa} = bb$, sive $\frac{14aa}{\sqrt{53361 - 4aa}} = b$. Unde AV $(\frac{98aa}{143b})$ est $\frac{7\sqrt{53361 - 4aa}}{143}$, & VP vel VQ $(\frac{112aa\sqrt{3}}{143b})$ est $\frac{8}{143}\sqrt{160083 - 12aa}$. Hoc est substituendo $280\llcorner 2254144$ pro aa, ac terminos in decimales numeros reducendo, $AV = 11\llcorner 188297$, & VP vel

VQ =

VQ = 22L147085. Adeoque AP (PV — AV) = 10L958788, & AQ (AV+VQ) 33L335382.

Denique si $\frac{1}{6}$ AR sive 1 ponatur Radius, erit $\frac{1}{6}$ AQ sive 5L555897 tangens anguli ARQ 79 gr. 47'. 48'', & $\frac{1}{6}$ AP sive 1L826465 tangens anguli ARP 61 gr. 17'. 57''. Quorum angulorum semisumma 70 gr. 32'. 52'', est complementum declinationis solis; & semidifferentia 9 gr. 14'. 56'', complementum latitudinis Loci. Proinde declinatio solis erat 19 gr. 27'. 8'', & Latitudo loci 80 gr. 45'. 4''. Quæ erant invenienda.

PROB. LVI.

E Cometæ motu uniformi rectilineo per Cœlum trajicientis locis quatuor observatis, distantiam à terra, motusque determinationem, in Hypothesi Copernicæa colligere.

SI è centro Cometæ in locis quatuor observatis, ad planum Eclipticæ demittantur totidem perpendicula; sintque A, B, C, D puncta in plano illo in quæ perpendicula incidunt; Per puncta illa agatur recta AD, & hæc secabitur à perpendiculis in eadem ratione cum linea quam Cometa motu suo describit, hoc est, ita ut sit AB ad AC ut tempus inter primam & secundam observationem ad tempus inter primam ac tertiam, & AB ad AD ut tempus illud inter primam & secundam observationem ad tempus inter primam & quartam. Ex observa-

obſervationibus itaque dantur rationes **linearum** AB, AC, AD ad invicem.

Inſuper in eodem Eclipticæ plano ſit S Sol, EH arcus lineæ Eclipticæ in qua terra movetur, E, F, G, H loca quatuor terræ temporibus obſervationum, E locus primus, F ſecundus, G tertius, H quartus. Jungantur AE, BF, CG, DH, & producantur donec tres poſteriores priorem ſecent in I, K & L, BF in I, CG in K, DH in L. Et erunt anguli AIB, AKC, ALD differentiæ longitudinum obſervatarum Cometæ; AIB differentia longitudinum loci primi Cometæ & ſecundi; AKC differentia longitudinum loci primi ac tertii; & ALD differentia longitudinum loci primi & quarti. Dantur itaque ex obſervationibus anguli AIB, AKC, ALD.

Junge SE, SF, EF; & ob data puncta S, E, F, datumque angulum ESF, dabitur angulus SEF. Datur etiam angulus SEA, utpote differentia longitudinis Cometæ & Solis tempore obſervationis primæ. Quare ſi complementum ejus ad duos rectos nempe angulum SEI, addas angulo SEF, dabitur angulus IEF. Trianguli igitur IEF dantur anguli

anguli una cum latere EF, adeoque datur etiam latus IE. Et simili argumento dantur KE & LE. Dantur igitur positione lineæ quatuor AI, BI, CK, DL, adeoque Problema huc redit, ut lineis quatuor positione datis, quintam inveniamus quæ ab his in data ratione secabitur.

Demissis ad AI perpendiculis BM, CN, DO, ob datum angulum AIB datur ratio BM ad MI. Est & BM ad CN in data ratione BA ad CA, & ob datum angulum CKN datur ratio CN ad KN. Quare datur etiam ratio BM ad KN; & inde ratio quoque BM ad MI − KN, hoc est ad MN + IK. Cape P ad IK ut est AB ad BC, & cum sit MA ad MN in eadem ratione, erit etiam P + MA ad IK + MN in eadem ratione; hoc est in ratione data. Quare datur ratio BM ad P + MA. Et simili argumento si capiatur Q ad IL in ratione AB ad BD, dabitur ratio BM ad Q + MA. Et proinde ratio BM ad ipsorum P + MA & Q + MA differentiam, quoque dabitur. At differentia illa, nempe P — Q vel Q — P, datur. Et proinde dabitur BM. Dato autem BM, simul dantur P + MA, & MI, & inde MA, ME, AE, & angulus EAB.

His inventis, erige ad A lineam plano Eclipticæ perpendicularem, quæ sit ad lineam EA ut tangens latitudinis Cometæ in observatione prima ad radium, & istius perpendicularis terminus erit locus centri Cometæ in observatione prima. Unde datur distantia Cometæ à Terra tempore illius observationis. Et eodem modo si è puncto B erigatur perpendicularis quæ sit ad lineam BF ut tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium, habebitur locus centri Cometæ in observatione illa secunda. Et acta linea à loco primo ad locum secundum, ea est in qua Cometa per Cœlum trajicit.

PROB.

PROB. LVII.

Si angulus datus CAD circà punctum angulare A positione datum, & angulus datus CBD circa punctum angulare B positione datum ea lege circumvolvantur ut crura AD, BD ad rectam positione datam EF sese semper intersecent: Invenire lineam illam curvam quam reliquorum crurum AC, BC intersectio C describit.

PRoduc CA ad d ut sit $Ad = AD$, & CB ad δ ut sit $B\delta = BD$. Fac angulum Ade æqualem angulo ADE, & angulum $B\delta f$ æqualem angulo BDF, & produc AB utrinque donec ea occurrat de & δf in e & f. Produc etiam ed ad G, ut sit $dG = \delta f$, & à puncto C ad lineam AB ipsi ed parallelam age CH, & ipsi $f\delta$ parallelam CK. Et concipiendo lineas eG, $f\delta$ immobiles manere dum anguli CAD, CBD lege præscripta circa polos A & B volvantur, semper erit Gd æqualis ipsi $f\delta$, &

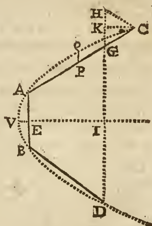
triangulum CHK dabitur specie. Dic itaque $Ae = a$, $eG = b$, $Bf = c$, $AB = m$, $BK = x$, & $CK = y$. Et erit $BK.CK :: Bf.f\delta$. Ergo $f\delta = \frac{cy}{x} = Gd$. Aufer hoc de Ge, & restabit $ed = b - \frac{cy}{x}$. Cum detur specie triangulum CKH, pone $CK.CH :: d.e$; & $CH.HK :: e.f$, & erit $CH = \frac{ey}{d}$, & $HK = \frac{fy}{d}$. Adeoque $AH = m - x - \frac{fy}{d}$. Est autem $AH.HC :: Ae.ed$, hoc est $m - x - \frac{f}{d}y . \frac{ey}{d} :: a . b - \frac{cy}{x}$. Ergo ducendo media & extrema in se, fiet $mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy - \frac{bf}{d}y + \frac{cfyy}{dx} = \frac{aey}{d}$. Duc omnes terminos in dx, eosq; in ordinem redige; & fiet $fcyy \begin{matrix} +dc \\ -ae \\ -fb \end{matrix} xy - dcmy - bdxx + bdmx = 0$. Ubi cum incognitæ quantitates x & y, ad duas tantum dimensiones ascendunt, patet curvam lineam quam punctum C describit esse Conicam Sectionem. Pone $\frac{ae + fb - dc}{c} = 2p$, & fiet $yy = \frac{2p}{f}xy + \frac{dm}{f}y + \frac{bd}{fc}xx - \frac{bdm}{fc}x$. Et extracta radice $y = \frac{p}{f}x + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{\frac{pp}{ff}xx + \frac{bd}{fc}xx + \frac{pdm}{ff}x - \frac{bdm}{fc}x + \frac{ddmm}{4ff}}$

Unde

Unde colligitur Curvam Hyperbolam esse si sit $\frac{bd}{fc}$ affirmativum, vel negativum & minus quam $\frac{pp}{ff}$; Parabolam si sit $\frac{bd}{fc}$ negativum & æquale $\frac{pp}{ff}$; Ellipsin vel circulum si sit $\frac{bd}{fc}$ & negativum & majus quam $\frac{pp}{ff}$. Q. E. I.

PROB. LVIII.

Parabolam describere quæ per data quatuor puncta transibit.



Sint puncta illa data A, B, C, D. Junge AB & eam biseca in E. Et per E age rectam aliquam VE, quam concipe diametrum esse Parabolæ, puncto V existente vertice ejus. Junge AC ipsique AB parallelam age DG occurrentem AC in G. Dic $AB = a$, $AC = b$, $AG = c$, $GD = d$. In AC cape AP cujusvis longitudinis & à P age PQ parallelam AB, & concipiendo Q punctum esse Parabolæ; dic $AP = x$, $PQ = y$, & æquationem quamvis ad Parabolam assume quæ relatio-

nem inter AP & PQ exprimat. Ut quod sit $y = e + fx \pm \sqrt{gg + hx}$.

Jam si ponatur AP sive $x = 0$, puncto P incidente in ipsum A, fiet PQ sive $y = 0$, ut & $= -$ AB. Scribendo autem in æquatione assumpta o pro x, fiet $y = e \pm \sqrt{gg}$, hoc est $= e \pm g$. Quorum valorum ipsius y major $e + g$ est $= 0$, minor $e - g$ $= -$ AB sive $-a$. Ergo $e = -g$ & $e - g$, hoc est $-2g = -a$, sive $g = \frac{1}{2}a$. Atque adeo vice æquationis assumptæ habebitur hæc $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + hx}$.

Adhæc si ponatur AP sive $x =$ AC ita ut punctum P incidat in C, fiet iterum PQ $= 0$. Pro x igitur in æquatione novissima scribe AC sive b, & pro y, o, & fiet $0 = -\frac{1}{2}a + fb + \sqrt{\frac{1}{4}aa + hb}$, sive $\frac{1}{2}a - fb = \sqrt{\frac{1}{4}aa + hb}$; & partibus quadratis $-afb + ffbb = hb$. Sive $ffb - fa = h$. Atque ita vice assumptæ æquationis habebitur isthæc $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$.

Insuper si ponatur AP sive $x =$ AG sive c, fiet PQ sive $y = -$ GD sive $-d$. Quare pro x & y in æquatione novissima scribe c & $-d$, & fiet $-d$ $= -\frac{1}{2}a + fc - \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbc - fac}$. Sive $\frac{1}{2}a - d - fc = \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbc - fac}$. Et partibus quadratis $-ad - fac + dd + 2dcf + ccff$ $= ffbc - fac$. Et æquatione ordinata & reducta, $ff = \frac{2d}{b-c}f + \frac{dd - ad}{bc - cc}$. Pro $b - c$ hoc est pro GC scribe k, & æquatio illa fiet $ff = \frac{2d}{k}f + \frac{dd - ad}{kc}$.

Et

Et extracta radice $f = \frac{d}{k} \pm \sqrt{\frac{ddc + ddk - adk}{kkc}}$.
Invento autem f, æquatio ad Parabolam, *viz.* $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$, plene determinatur: Cujus itaque constructione Parabola etiam determinabitur. Constructio autem ejus hujusmodi est. Ipsi BD parallelam age CH occurrentem DG in H. Inter DG ac DH cape mediam proportionalem DK, & ipsi CK parallelam age EI bisecantem AB in E, & occurrentem DG in I. Dein produc IE ad V, ut sit EV. EI :: $EBq . DIq - EBq$, & erit V vertex, VE diameter, & $\frac{EBq}{VE}$ latus rectum Parabolæ quæsitæ.

PROB. LIX.

Conicam sectionem per data quinque puncta describere.



Sint puncta ista A, B, C, D, E. Junge AC, BE se mutuo secantes in H. Age DI parallelam BE, & occurrentem AC in I. Item EK parallelam AC, & occurrentem DI productæ in K. Produc ID ad F, & EK ad G; ut sit AHC.BHE :: AIC.FID :: EKG.FKD, & erunt puncta F ac G in conica sectione, ut notum est.

Hoc tamen obſervare debebis, quod ſi punctum H cadit inter puncta omnia A, C & B, E, vel extra ea omnia, punctum I cadere debebit vel inter puncta omnia A, C & F, D, vel extra ea omnia; & punctum K inter omnia D, F & E, G, vel extra ea omnia. At ſi punctum H cadit inter duo puncta A, C, & extra alia duo B, E vel inter illa duo B, E, & extra altera duo A, C, debebit punctum I cadere inter duo punctorum A, C & F, D, & extra alia duo eorum; & ſimiliter punctum K debebit cadere inter duo punctorum D, F & E, G, & extra alia duo eorum: Id quod fiet capiendo I F, K G, ad hanc vel illam partem punctorum I, K, pro exigentia problematis. Inventis punctis F ac G, biſeca AC, EG in N & O; item BE, FD in L & M. Junge NO, LM ſe mutuo ſecantes in R; & erunt LM & NO diametri conicæ ſectionis, R centrum ejus, & BL, FM ordinatim applicatæ ad diametrum LM. Produc LM hinc inde ſi opus eſt ad P & Q ita ut ſit $BLq . FMq :: PLQ . PMQ$, & erunt P & Q vertices Conicæ ſectionis & PQ latus tranſverſum. Fac $PLQ . LBq :: PQ . T$. Et erit T latus rectum. Quibus cognitis cognoſcitur Figura.

Reſtat tantum ut doceamus quomodo LM hinc inde producenda ſit ad P & Q ita ut fiat $BLq . FMq :: PLQ . PMQ$. Nempe PLQ ſive $PL \times LQ$ eſt $\overline{PR - LR} \times \overline{PR + LR}$, nam PL eſt $PR - LR$, & LQ eſt $RQ + LR$ ſeu $PR + LR$. Porro $\overline{PR - LR} \times \overline{PR + LR}$ multiplicando fit $PRq - LRq$. Et ad eundem modum PMQ eſt $\overline{PR + RM} \times \overline{PR - RM}$, ſeu $PRq - RMq$. Ergo $BLq . FMq :: PRq - LRq . PRq - RMq$, & dividendo $BLq - FMq . FMq :: RMq - LRq . PRq - RMq$. Quamobrem cum dentur $BLq - FMq$, FMq, & $RMq - LRq$ dabitur

bitur $PRq - RMq$. Adde datum RMq, & dabitur ſumma PRq, adeoque & latus ejus PR, cui QR æqualis eſt.

PROB. LX.

Conicam ſectionem deſcribere quæ tranſibit per quatuor data puncta, & in uno iſtorum punctorum continget rectam poſitione datam.



Sint puncta quatuor data A, B, C, D, & recta poſitione data AE, quam conica ſectio contingat in puncto A. Junge duo quævis puncta DC, & DC, producta ſi opus eſt, occurrat tangenti in E. Per quartum punctum B ipſi DC age parallelam BF, quæ occurrat eidem tangenti in F. Item tangenti parallelam age DI, quæ occurrat ipſi BF in I. In FB, DI, ſi opus eſt productis, cape FG, HI ejus longitudinis ut ſit $AEq . CED :: AFq . BFG :: DIH . BIG$. Et erunt puncta G & H in Conica ſectione, ut notum eſt: Si modo capias FG, IH ad legitimas partes punctorum F & I, juxta regulam in ſuperiore Problemate traditam. Biſeca BG, DC, DH in K, L & M. Junge KL, AM ſe mutuo ſecantes in O, & erit O centrum, A vertex, & HM ordinatim applicata ad ſemidiametrum AO. Quibus cognitis cognoſcitur figura.

PROB. LXI.

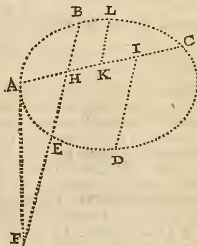
Conicam sectionem describere quæ transibit per tria data puncta, & in duobus istorum punctorum continget rectas positione datas.

Sint puncta illa data A, B, C, Tangentes AD, BD ad puncta A & B, D communis intersectio tangentium. Biseca AB in E. Age DE, & produc eam donec in F occurrat CF actæ parallelæ AB: & erit DF diameter, & AE, CF ordinatim applicatæ ad diametrum. Produc DF ad O, & in DO cape OV mediam proportionalem inter DO & EO ea lege ut sit etiam $AEq.CFq::$ $VE \times \overline{VO+OE}.VF \times \overline{VO+OF}$; & erit V vertex, & O centrum Figuræ: Quibus cognitis Figura simul cognoscitur. Est autem $VE = VO - OE$, adeoq; $VE \times \overline{VO+OE} = \overline{VO-OE} \times \overline{VO+OE} = VOq - OEq$. Præterea quia VO media proportionalis est inter DO & EO erit $VOq = DOE$, adeoque $VOq - OEq = DOE - OEq = DEO$. Et simili argumento erit $VF \times \overline{VO+OF} = VOq - OFq = DOF - OFq$. Ergo $AEq.CFq::DEO.DOF - OFq$

$-OFq$. Eſt $OFq = EOq - 2FEO + FEq$ Adeoque $DOE - OFq = DOE - OEq + 2FEO - FEq = DEO + 2FEO - FEq$. Et $AEq . CFq :: DEO . DEO + 2FEO - FEq :: DE . DE + 2FE - \frac{FEq}{EO}$. Datur ergo $DE + 2FE - \frac{FEq}{EO}$. Aufer hoc de dato $DE + 2FE$, & reſtabit $\frac{FEq}{EO}$ datum. Sit illud N; & erit $\frac{FEq}{N} = EO$, adeoq; dabitur EO. Dato autem EO ſimul datur VO medium proportionale inter DO & EO.

Hoc modo per Theoremata quædam Apollonii ſatis expedite reſolvuntur hæc problemata: Quæ tamen ſine iſtis Theorematibus per Algebram ſolam reſolvi poſſent. Ut ſi proponatur primum trium noviſſimorum Problematum: Sint puncta quinque data A, B, C, D, E, per quæ Conica ſectio tranſire debet. Junge duo quævis AC, & alia duo BE rectis ſe ſecantibus in H. Ipſi BE parallelam age DI occurrentem AC in I; ut & aliam quamvis rectam KL occurrentem AC in K, & conicæ ſectioni in L. Et finge Conicam ſectionem datam eſſe, ita ut cognito puncto K ſimul cognoſcatur punctum L. Et poſito $AK = x$, & $KL = y$, ad exprimendam relationem inter x & y, aſſume quamvis æquationem quæ Conicas ſectiones generaliter exprimit, puta hanc $a + bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, ubi a, b, c, d, e denotant quantitates determinatas cum ſignis ſuis, x vero & y quantitates indeterminatas. Si jam quantitates determinatas a, b, c, d, e invenire poſſumus, habebimus Conicam ſectionem. Fingamus ergo punctum L ſucceſſive incidere in puncta A, C, B, E, D, & videamus quid inde ſequetur. Si ergo punctum L incidit in punctum A, erit in eo caſu AK & KL, hoc

hoc est x & y nihil. Proinde æquationis omnes termini præter a evanescent, & restabit $a = 0$. Quare delendum est a in æquatione illa, & cæteri termini $bx + cxx + dy + exy + yy$ erunt $= 0$. Porro si L incidit in C erit AK seu $x = AC$, & LK seu $y = 0$. Pone ergo $AC = f$, & substituendo f pro x, & o pro y æquatio ad curvam



$bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, evadet $bf + cff = 0$, seu $b = -cf$. Et in æquatione illa scripto $-cf$ pro b evadet $-cfx + cxx + dy + exy + yy = 0$. Adhæc si punctum L incidit in punctum B, erit AK seu $x = AH$, & KL seu $y = BH$. Pone ergo $AH = g$ & $BH = h$, & perinde scribe g pro x & h pro y, & æquatio $-cfx + cxx$, &c. evadet $-cfg + cgg + dh + egh + hh = 0$. Quod si punctum L incidit in E erit $AK = AH$ seu $x = g$, & KL seu $y = HE$. Pro HE ergo scribe $-k$ cum signo negativo quia HE jacet ad contrarias partes lineæ AC, & substitu-

endo

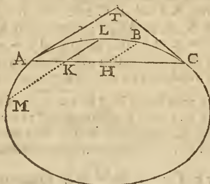
endo g pro x & $-k$ pro y, æquatio $-cfx + cxx$, &c. evadet $-cfg + cgg - dk - egk + kk = 0$. Aufer hoc de superiori æquatione $-cfg + cgg + dh + egh + hh$, & restabit $dh + egh + hh + dk + egk - kk = 0$. Divide hoc per $h + k$, & fiet $d + eg + h - k = 0$. Hoc ductum in h aufer de $-cfg + cgg + dh + egh + hh = 0$, & restabit $-cfg + cgg + hk = 0$, seu $\frac{hk}{-gg + fg} = c$. Denique si punctum L incidit in punctum D, erit AK seu $x = AI$, & KL seu $y = ID$. Quare pro AI scribe m & pro ID n, & perinde pro x & y substitue m & n, & æquatio $-cfx + cxx$, &c. evadet $-cfm + cmm + dn + emn + nn = 0$. Hoc divide per n & fiet $\frac{-cfm + cmm}{n} + d + em + n = 0$. Aufer $d + eg + h - k = 0$, & restabit $\frac{-cfm + cmm}{n} + em - eg + n - h + k = 0$. Sive $\frac{cmm - cfm}{n} + n - h + k = eg - em$. Jam vero ob data puncta A, B, C, D, E dantur AC, AH, AI, BH, EH, DI, hoc est f, g, m, h, k, n. Atque adeo per æquationem $\frac{hk}{fg - gg} = c$ datur c. Dato autem c, per æquationem $\frac{cmm - cfm}{n} + n - h + k = eg - em$ datur $eg - em$. Divide hoc datum per datum $g - m$, & emerget datum e. Quibus inventis æquatio $d + eg + h - k = 0$, seu $d = k - h - eg$ dabit d. Et his cognitis simul determinatur æquatio ad quæsitam Conicam sectionem $cfx = cxx + dy + exy + yy$. Et ex ea æquatione per methodum Cartesii determinabitur Conica sectio.

Quod

Quod si quatuor A, B, C, E, & positio rectæ AF quæ tangit Conicam sectionem ad unum istorum punctorum A daretur, posset Conica sectio sic facilius determinari. Inventis ut supra æquationibus $cfx = cxx + dy + exy + yy$, $d = k - b - eg$, & $c = \frac{hk}{fg - gg}$, concipe tangentem AF occurrere rectæ EH in F, dein punctum L moveri per perimetrum figuræ CDE donec incidat in punctum A: & ultima ratio ipsius LK ad AK erit ratio FH ad AH, ut contemplanti figuram constare potest. Dic vero $FH = p$, & in hoc casu ubi LK est ad AK in ultima ratione erit $p . g :: y , x$, sive $\frac{gy}{p} = x$. Quare pro x in æquatione $cfx = cxx + dy + exy + yy$, scribe $\frac{gy}{p}$, & orietur $\frac{cfgy}{p} = \frac{cggyy}{pp} + dy + \frac{egyy}{p} + yy$. Divide omnia per y & emerget $\frac{cfg}{p} = \frac{cggy}{pp} + d + \frac{egy}{p} + y$. Jam quia supponitur punctum L incidere in punctum A, adeoque KL seu y infinite parvum vel nihil esse, dele terminos qui per y multiplicantur, & restabit $\frac{cfg}{p} = d$. Quare fac $\frac{hk}{fg - gg} = c$ dein $\frac{cfg}{p} = d$, denique $\frac{k - b - d}{g} = e$, & inventis c, d & e, æquatio $cfx = cxx + dy + exy + yy$ determinabit conicam sectionem.

Si denique tria tantum puncta A, B, C dentur, una cum positione duarum rectarum AT, CT quæ tangunt Conicam sectionem in duobus istorum

rum punctorum A & C, obtinebitur ut supra ad Conicam sectionem æquatio hæc $cfx = cxx + dy + exy + yy$. Deinde si supponatur ordinatam KL parallelam esse tangenti AT, & concipiatur



eam produci donec rursus occurrat Conicæ sectioni in M, & lineam illam LM accedere ad tangentem AT donec cum ea conveniat ad A; ultima ratio linearum KL & KM ad invicem erit ratio æqualitatis, ut contemplanti figuram constare potest. Quamobrem in illo casu existentibus KL & KM, sibi invicem æqualibus, hoc est duobus valoribus ipsius y (affirmativo scilicet KL, & negativo KM) æqualibus, debent æquationis $cfx = cxx + dy + exy + yy$ termini illi in quibus y est imparis dimensionis, hoc est termini $+ dy + exy$ respectu termini yy in quo y est paris dimensionis, evanescere. Aliter enim duo valores ipsius y, affirmativus & negativus, æquales esse non possunt. Et in illo quidem casu AK infinite minor erit quam LK, hoc est x quam y, proinde & terminus exy quam terminus yy. Atque adeo infinite minor existens, pro nihilo habendus erit. At terminus dy respectu termini yy, non evanescit ut oportet, sed eo major erit nisi d supponatur esse nihil. De-

lendus

Delendus est itaque terminus dy, & sic restabit $cfx = cxx + exy + yy$, æquatio ad conicam sectionem. Concipiantur jam tangentes AT, CT sibi mutuo occurrere in T, & punctum L accedere ad punctum C donec in illud incidat. Et ultima ratio ipsius KL ad KC erit AT ad AC. KL erat y; AK, x; & AC, f; atque adeo KC, $f-x$. Dic AT $= g$, & ultima ratio y ad $f - x$, erit ea quæ est g ad f. Æquatio $cfx = cxx + exy + yy$, subducto utrobique cxx fit $cfx - cxx = exy + yy$; hoc est, $\overline{f-x}$ in $cx = y$ in $\overline{ex+y}$. Ergo est $y : f - x :: cx . ex + y$, adeoque $g . f :: cx . ex + y$. At puncto L incidente in C, fit y nihil. Ergo $g . f :: cx . ex$. Divide posteriorem rationem per x; & evadet $g . f :: c . e$, & $\frac{cf}{g} = e$. Quare si in æquatione $cfx = cxx + exy + yy$, scribas $\frac{cf}{g}$ pro e; fiet $cfx = cxx + \frac{cf}{g}xy + yy$, æquatio ad conicam sectionem. Denique ipsi KL seu AT à dato puncto B per quod Conica sectio transire debet age parallelam BH occurrentem AC in H, & concipiendo LK accedere ad BH donec cum ea coincidat, in eo casu erit AH $= x$, & BH $= y$. Dic ergo datam AH $= m$, & datam BH $= n$, & perinde pro x & y in æquatione $cfx = cxx + \frac{cf}{g}xy + yy$, scribe m & n, & orietur $cfm = cmm + \frac{cf}{g}mn + nn$. Aufer utrobique $cmm + \frac{cf}{g}mn$; & fiet $cfm - cmm - \frac{cf}{g}mn = nn$. Pone $f - m$

$- fn$

$-\frac{fn}{g} = s$, & erit $csm = nn$. Divide utramque partem æquationis per sm, & orietur $c = \frac{nn}{sm}$. Invento autem c, determinata habetur æquatio ad Conicam sectionem $cfx = cxx + \frac{cf}{g}xy + yy$. Et inde per methodum Cartesii Conica sectio datur & describi potest.

Atque hactenus varia evolvi Problemata. In scientiis enim addiscendis prosunt exempla magis quam præcepta. Qua de causa in his fusius expatiatus sum. Sed & aliqua quæ inter scribendum occurrebant immiscui sine Algebra soluta, ut insinuarem in problematis quæ prima fronte difficilia videantur non semper ad Algebram recurrendum esse. Sed tempus est jam æquationum resolutionem docere. Nam postquam Problema ad æquationem deductum est, radices illius æquationis quæ quantitates sunt Problemati satisfacientes extrahere oportebit.

Quomodo æquationes resolvendæ sunt.

POstquam igitur in Quæstionis alicujus solutione ad æquationem perventum est, & æquatio illa debite ordinata est & reducta; ubi quantitates quæ per species designantur & pro datis habentur, revera dantur in numeris, pro ipsis substituendi sunt numeri illi in æquatione, & habebitur æquatio numeralis, cujus radix extracta tandem satisfaciet Quæstioni. Ut si in sectione anguli in quinque partes æquales sumendo r pro radio circuli, q pro subtensa complementi anguli propositi ad duos rectos, & x pro subtensa complementi quintæ partis anguli illius pervenissem ad hanc æquationem $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x - r^4q = 0$. Ubi in casu aliquo particulari dantur in numeris radius r, & linea dati anguli complementum subtendens q; ut quod radius sit 10 & subtensa 3; substituo numeros illos in æquatione pro r & q, & provenit æquatio numeralis $x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0$, cujus radix tandem extracta erit x, seu linea complementum quintæ partis anguli illius dati subtendens.

De natura radicum Æquationis.

Radix vero numerus est qui si in æquatione pro litera vel specie radicem significante substituatur, efficiet omnes terminos evanescere.

Sic æquationis $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, unitas est radix quoniam scripta pro x producit

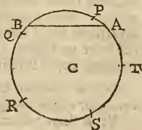
1 —

$1 - 1 - 19 + 49 - 30$, hoc eſt nihil. Sed æquationis ejuſdem plures eſſe poſſunt radices. Nam ſi in hac eadem æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, pro x ſcribas numerum 2, & pro poteſtatibus x ſimiles poteſtates numeri 2, producetur $16 - 8 - 76 + 98 - 30$, hoc eſt nihil. Atque ita ſi pro x ſcribas numerum 3 vel numerum negativum -5, utroque caſu producetur nihil, terminis affirmativis & negativis in hiſce quatuor caſibus ſe mutuo deſtruentibus. Proinde cum numerorum 1, 2, 3, & -5, quilibet ſcriptus in æquatione pro x impleat conditionem ipſius x, efficiendo ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur nihilo, erit quilibet eorum radix æquationis.

Et ne mireris eandem æquationem habere poſſe *plures radices*, ſciendum eſt *plures eſſe poſſe ſolutiones ejuſdem Problematis.*

Ut ſi circulorum duorum datorum quæreretur *interſectio*; *duæ* ſunt eorum interſectiones, atque adeo quæſtio admittit *duo reſponſa*; & perinde æquatio interſectionem determinans habebit *duas radices* quibus interſectionem utramque determinet, *ſi modo nihil in datis ſit quo reſponſum ad unam interſectionem determinetur.*

Sic & ſi arcus APB pars quinta AP invenienda eſſet, quamvis animum forte advertas tantum ad arcum APB, tamen æquatio qua quæſtio ſolvetur determinabit quintam partem arcuum omnium qui terminantur ad puncta A & B; nempe quintam partem arcuum ASB, APBSAPB. ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æque ac quintam partem arcus APB; quæ quintæ



partes si dividas totam circumferentiam in æquales quinque partes PQ, QR, RS, ST, TP, erunt AT, AQ, ATS, AQR. Quoniam igitur quærendo quintas partes arcuum quos recta AB subtendit ad casus omnes determinandos circumferentia tota secari debet in quinque punctis P, Q, R, S, T, ideo æquatio ad omnes casus determinandos habebit radices quinque. Nam quintæ partes horum omnium arcuum pendent ab iisdem datis, & per ejusdem generis calculum inveniuntur; ita ut in eandem semper æquationem incideris sive quæras quintam partem Arcus APB, sive quintam partem Arcus ASB, sive alterius cujusvis ex arcubus quintam partem. Unde si æquatio qua quinta pars Arcus APB determinatur non haberet plures radices quam unam, dum quærendo quintam partem Arcus ASB incidimus in eandem illam æquationem, sequeretur majorem hunc arcum habere eandem quintam partem cum priore qui minor est, eo quod subtensa ejus per eandem æquationis radicem exprimitur. *In omni igitur problemate necesse est æquationem qua respondetur tot habere radices, quot sunt quæsitæ quantitatis casus diversi ab iisdem datis pendentes & eadem argumentandi ratione determinandi.*

Potest vero æquatio tot habere radices quot sunt dimensiones ejus, & non plures.

Sic æquatio $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, quatuor habet radices 1, 2, 3, & -5; non autem plures. Nam quilibet ex his numeris scriptus in æquatione pro x efficiet terminos omnes se mutuo destruere ut dictum est; præter hos vero nullus est numerus cujus substitutione hoc eveniet.

Cæterum numerus & natura radicum ex generatione æquationis optime intelligetur.

Ut si scire vellemus quomodo generetur æquatio cujus radices sint 1, 2, 3, & -5; supponendum

dum erit x ambigue significare numeros illos, seu esse $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, & $x = -5$, vel quod perinde est, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x + 5 = 0$; Et multiplicando hæc in se, prodibit multiplicatione $x - 1$, in $x - 2$, hæc æquatio $xx - 3x + 2 = 0$, quæ duarum est dimensionum ac duas habet radices 1 & 2. Et hujus multiplicatione in $x - 3$ prodibit $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, æquatio trium dimensionum totidemque radicum, quæ iterum multiplicata per $x + 5$; fit $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ut supra. Cum igitur hæc æquatio generetur ex quatuor factoribus, $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, & $x + 5$, in se continuo ductis, ubi factorum aliquis nihil est, quod sub omnibus fit nihil erit; ubi vero horum nullus nihil est, quod sub omnibus continetur nihil esse non potest. Hoc est, non potest $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30$, esse nihilo æquale ut oportet, nisi his quatuor casibus ubi est $x - 1 = 0$, vel $x - 2 = 0$, vel $x - 3 = 0$, vel denique $x + 5 = 0$, proinde soli numeri 1, 2, 3, & -5 valere possunt x seu radices esse æquationis. Et simile est ratiocinium de omnibus æquationibus. Nam tali multiplicatione imaginari possumus omnes generari, quamvis factores ab invicem secernere solet esse difficillimum, & ipsum est quod æquationem resolvere & radices extrahere. Habitis enim radicibus habentur factores.

Radices vero sunt duplices affirmativæ *ut in allato exemplo* 1, 2, & 3, *&* negativæ *ut* -5. *Ex his vero aliquæ non raro evadunt* impossibiles.

Sic æquationis $xx - 2ax + bb = 0$, radices duæ quæ sunt $a + \sqrt{aa - bb}$, & $a - \sqrt{aa - bb}$ reales quidem sunt ubi aa majus est quam bb, at ubi aa minus est quam bb, evadunt impossibiles

 eo

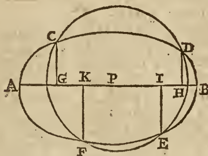
eo quod $aa - bb$ tunc evadet negativa quantitas, & negativæ quantitatis radix quadratica est impossibilis. Omnis enim radix possibilis sive affirmativa sit, sive negativa, si per seipsam multiplicetur, producet quadratum affirmativum; proinde impossibilis erit quæ quadratum negativum producere debet. Eodem argumento colligitur æquationem $x^3 - 4xx + 7x - 6 = 0$, unam quidem realem radicem habere quæ est 2, duas vero impossibiles, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$. Nam quælibet ex his 2, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$ scripta in æquatione pro x efficiet omnes ejus terminos se mutuo destruere; sunt vero $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$ numeri impossibiles, eo quod extractionem radicis quadraticæ ex numero negativo -2 præsupponant.

Æquationum vero radices sæpe impossibiles esse æquum est ne casus problematum, qui sæpe impossibiles sunt, exhibeant possibiles.

Ut si rectæ & circuli intersectio determinanda esset, & pro circuli radio & rectæ à centro ejus distantia ponantur literæ duæ; ubi æquatio intersectionem definiens habetur, si pro litera designante distantiam rectæ à centro ponatur numerus minor radio, intersectio possibilis erit; sin major, fiet impossibilis; & æquationis radices duæ quæ intersectiones duas determinant, debent esse perinde possibiles vel impossibiles ut rem ipsam vere exprimant. Atque ita si circulus CDEF, & Ellipsis ACBF se mutuo secent in punctis C, D, E, F, & ad rectam aliquam positione datam AB, demittantur perpendicula CG, DH, EI, FK, & quærendo longitudinem alicujus è perpendiculis, perveniatur tandem ad æquationem, æquatio illa ubi circulus secat Ellipsin in quatuor punctis habebit quatuor radices reales quæ erunt quatuor

illa

illa perpendicula. Quod si circuli radius manente centro ejus minuatur donec punctis E & F coalescentibus circulus tandem tangat Ellipsin, ex radi-



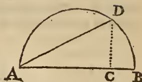
cibus duæ illæ quæ perpendicula EI & FK jam coincidentia exprimunt evadent æquales. Et si circulus adhuc minuatur ut Ellipsin in puncto EF ne quidem tangat sed secet tantum in alteris duobus punctis C, D, tunc ex quatuor radicibus duæ illæ quæ perpendicula EI, FK jam facta impossibilia exprimebant, fient una cum perpendiculis illis impossibiles. Et hoc modo in omnibus æquationibus augendo vel minuendo terminos earum, ex inæqualibus radicibus duæ primo æquales deinde impossibiles evadere solent. Et inde fit quod radicum impossibilium numerus semper sit par.

Sunt tamen radices æquationum aliquando possibiles ubi Schema impossibiles exhibet. Sed hoc fit ob limitationem aliquam in Schemate quod ad æquationem nil spectat.

Ut si in semicirculo ADB datis diametro AB, & linea inscripta AD, demissoque perpendiculo

 DC,

DC, quærerem diametri ſegmentum AC, foret $\frac{ADq}{AB} = AC$. Et per hanc æquationem AC realis exhibetur quantitas ubi linea inſcripta AD major eſt quam diameter AB, per Schema vero AC tunc evadit impoſſibilis. Nimirum in ſchemate linea AD ſupponitur inſcribi in circulo, atque adeo diametro circuli major eſſe non poteſt; in æquatione vero nihil eſt quod à conditione illa pendeat. Ex hac ſola linearum conditione colligitur æquatio, quod ſint AB, AD, & AC continue proportionales. Et quoniam æquatio non complectitur omnes conditiones ſchematis non neceſſe eſt ut omnium conditionum teneatur limitibus. Quicquid amplius eſt in ſchemate quam in æquatione poteſt illud limitibus arctare, hanc non item. Qua de cauſa ubi æquationes ſunt imparium dimenſionum, adeoque radices omnes impoſſibiles habere non poſſunt; ſchemata quantitatibus à quibus radices omnes pendent ſæpe limites imponunt quos tranſgredi ſervatis ſchematum conditionibus impoſſibile eſt.



Ex radicibus vero quæ reales ſunt, affirmativæ & negativæ ad plagas oppoſitas ſolent tendere.

Sic in ſchemate penultimo quærendo perpendiculum CG incidetur in æquationem cujus duæ erunt affirmativæ radices CG ac DH à punctis C & D tendentes verſus unam plagam, & duæ negativæ EI & FK, tendentes à punctis E & F verſus plagam oppoſitam. Aut ſi in linea AB ad quam perpendicula demittuntur detur aliquod punctum P, & pars ejus PG à puncto illo dato ad perpendiculorum aliquod CG extendens quæratur, incidemus in æquationem quatuor radicum PG, PH,

PI.

PI, PK, quarum quæsita PG, & quæ à puncto P ad easdem partes cum PG tendunt (ut PK) affirmativæ erunt, quæ vero tendunt ad partes contrarias (ut PH, PI) negativæ.

Ubi æquationis radices nullæ impossibiles sunt, numerus radicum *affirmativarum & negativarum ex* signis *terminorum æquationis cognosci potest.* Tot *enim sunt radices affirmativæ quot signorum in continua serie* mutationes *de* $+$ *in* $-$ & $-$ *in* $+$; *cæteræ* negativæ *sunt.*

Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ubi terminorum signa se sequuntur hoc ordine $+ - - + -$ variationes secundi $-$ à primo $+$, quarti $+$ à tertio $-$ & quinti $-$, à quarto $+$, indicant tres affirmativas esse radices, adeoque quartam negativam esse. At ubi radices aliquæ *impossibiles* sunt regula non valet, nisi quatenus impossibiles illæ quæ nec negativæ sunt nec affirmativæ pro *ambiguis* habeantur. Sic in æquatione $x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$, signa indicant unam esse affirmativam radicem & duas negativas. Finge $x = 2p$ seu $x - 2p = 0$, & multiplica æquationem priorem per hanc $x - 2p = 0$, ut una adhuc radix affirmativa addatur prioribus, & prodibit

hæc æquatio $x^4 - px^3 + ppxx \begin{matrix} -6p^3 \\ -q \end{matrix} x + 2pq = 0$,

quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices, habet tamen, si mutationem signorum spectes, affirmativas quatuor. Sunt ergo *duæ impossibiles* quæ pro ambiguitate sua priori casu negativæ posteriori affirmativæ esse videntur.

Verum quot radices impossibiles sunt cognosci fere potest per hanc regulam.

Constitue seriem fractionum quorum denominatores sunt numeri in hac progressione 1, 2, 3, 4, 5, &c. pergendo ad numerum usque qui est dimensionum æquationis; numeratores vero eadem series numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem posteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca super terminis mediis æquationis. Et sub quolibet mediorum terminorum, si quadratum ejus ductum in fractionem capiti imminentem sit majus quam rectangulum terminorum utrinque consistentium, colloca signum +; sin minus, signum −. Sub primo vero & ultimo termino colloca signum +. Et tot erunt radices impossibiles quot sunt in subscriptorum signorum serie mutationes de + in − & − in +.

Ut si habeatur æquatio $x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$: Divido seriei hujus $\frac{3}{1} . \frac{2}{2} . \frac{1}{3}$ fractionum secundam $\frac{2}{2}$ per primam $\frac{3}{1}$, & tertiam $\frac{1}{3}$ per secundam $\frac{2}{2}$, & fractiones prodeuntes $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{3}$ colloco super mediis terminis æquationis ut sequitur. Dein

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{3}. & \frac{1}{3}. & \\ x^3 + & pxx + & 3ppx - & q = 0 \\ + & - & + & + \end{array}$$

quoniam quadratum secundi termini pxx ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, nimirum $\frac{ppx^4}{3}$ minus est quam primi termini x^3, & tertii $3ppx$ rectangulum $3ppx^4$ sub termino pxx colloco signum −. At quia tertii termini $3ppx$ quadratum $9p^4xx$ ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, majus est quam nihil, atque adeo multo majus quam secundi termini pxx, & quarti $-q$ rectangulum negativum, colloco sub tertio illo termino signum +. Dein sub primo termino x^3 & ultimo $-q$ colloco signa +. Et signorum subscriptorum quæ in hac sunt serie + − + + mutationes duæ, una de + in −, alia de − in + indicant duas esse radices impossibiles.

Sic

Sic & æquatio $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$, duas habet radices impoſſibiles. Æquatio item $x^4 - 6xx - 3x - 2 = 0$, duas habet.

$$\begin{array}{l} \quad\quad\; \tfrac{1}{3}. \quad\quad \tfrac{1}{3}. \\ x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0 \\ + \quad\; + \quad\;\; - \quad\; + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad\; \tfrac{3}{8} \quad\;\; \tfrac{4}{9} \quad\;\; \tfrac{3}{8} \\ x^4 * - 6xx - 3x - 2 = 0 \\ +\,+ \quad\; + \quad\; - \quad\; + \end{array}$$

Nam hæc fractionum ſeries $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}$ dividendo ſecundam per primam, tertiam per ſecundam, & quartam per tertiam, dat hanc ſeriem $\frac{3}{8}.\frac{4}{9}.\frac{3}{8}$ ſuper mediis æquationis terminis collocandam. Dein ſecundi termini qui hic nihil eſt quadratum ductum in fractionem imminentem $\frac{3}{8}$ producit nihil, quod tamen majus eſt quam rectangulum negativum $-6x^6$ ſub terminis utrinque poſitis x^4 & $-6xx$ contentum. Quare ſub termino illo deficiente ſcribo $+$. In cæteris pergo ut in exemplo ſuperiori; & ſignorum ſubſcriptorum prodit hæc ſeries $+ + + - +$ ubi duæ mutationes indicant duas radices impoſſibiles. Et ad eundem modum in æquatione $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, deteguntur impoſſibiles duæ.

$$\begin{array}{l} \quad\quad\; \tfrac{2}{5}. \quad\;\; \tfrac{1}{2}. \quad\;\; \tfrac{1}{2}. \quad\; \tfrac{2}{5}. \\ x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0 \\ + \quad\; + \quad\; - \quad\;\; + \quad\;\; + \quad\; + \end{array}$$

Ubi termini duo vel plures ſimul deſunt, ſub primo terminorum deficientium collocandum eſt ſignum $-$, ſub ſecundo ſignum $+$, ſub tertio ſignum $-$, & ſic deinceps, ſemper variando ſigna, niſi quòd ſub ultimo terminorum ſimul deficientium ſemper collocandum eſt ſignum $+$ ubi termini deficientibus utrinque proximi habent ſigna contraria. Ut in æquationibus

$$\begin{array}{l} x^5 + ax^4 * * * + a^5 = 0, \\ + \quad\; + \quad + - + - + \end{array}$$

&

$$\begin{array}{l} x^5 + ax^4 * * * - a^5 = 0, \\ + \quad\; + \quad + - + + + \end{array}$$

quarum

rum prior quatuor poſterior duas habet impoſſibiles radices. Sic & æquatio

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{3}{7}. & \frac{5}{9}. & \frac{3}{5}. & & \frac{3}{5}. & \frac{5}{9}. & \frac{3}{7}. & \\ x^7 - 2x^6 & + 3x^5 & - 2x^4 & + x^3 & * & * & - 3 = 0 \\ + \quad - & + & - & + & - & + & + \end{array}$$

ſex habet impoſſibiles.

Hinc etiam cognoſci poteſt utrum radices impoſſibiles inter affirmativas radices latent an inter negativas. Nam ſigna terminorum ſignis ſubſcriptis variantibus imminentium indicant tot affirmativas eſſe impoſſibiles quot ſunt ipſorum variationes, & tot negativas quot ſunt ipſorum ſucceſſiones ſine variatione. Sic in æquatione

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & - 4x^4 & + 4x^3 & - 2xx & - 5x & - 4 = 0 \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

quoniam ſignis infra ſcriptis variantibus $+ - +$ quibus radices duæ impoſſibiles indicantur, imminentes termini $-4x^4 + 4x^3 - 2xx$, ſigna habent $- + -$, quæ per duas variationes indicant duas affirmativas radices; ideo radices duæ impoſſibiles inter affirmativas latebunt. Cum itaque omnium æquationis terminorum ſigna $+ - + - - -$ per tres variationes indicant tres eſſe affirmativas radices, & reliquas duas negativas eſſe, & inter affirmativas lateant duæ impoſſibiles, ſequitur æquationis unam eſſe radicem vere affirmativam duas negativas ac duas impoſſibiles. Quod ſi æquatio fuiſſet

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & - 4x^4 & - 4x^3 & - 2xx & - 5x & - 4 = 0 \\ + & + & - & - & + & + \end{array}$$

tunc termini ſubſcriptis ſignis prioribus variantibus $+ -$ imminentes, nimirum $- 4x^4 - 4x^3$ per ſigna ſua non variantia $-$ & $-$ indicant unam ex negativis radicibus impoſſibilem eſſe; & termini ſignis ſubſcriptis poſterioribus variantibus $- +$ imminentes, nimirum $- 2xx - 5x$ per ſigna ſua non variantia $-$ & $-$ indicant aliam

ex

ex negativis radicibus impossibilem esse. Quamobrem cum æquationis signa $+ - - - - -$ per unam variationem indicent unam affirmativam radicem, cæteras quatuor negativas esse; sequitur unam esse affirmativam, duas negativas, ac duas impossibiles. Atque hæc ita se habent ubi non sunt plures impossibiles radices quam per regulam allatam deteguntur. Possunt enim plures esse, licet id perraro eveniat.

De transmutationibus Æquationum.

CÆterum æquationis cujusvis radices omnes affirmativæ *in* negativas *&* negativæ *in* affirmativas *mutari possunt, idque mutando tantum signa terminorum alternorum.*

Sic æquationis $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, radices tres affirmativæ mutabuntur in negativas, & duæ negativæ in affirmativas mutando tantum signa secundi quarti & sexti termini ut hic fit, $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2xx - 5x + 4 = 0$. Easdem habet hæc æquatio radices cum priore nisi quod hic affirmativæ sunt quæ ibi erant negativæ, & hic negativæ quæ ibi erant affirmativæ; & radices duæ impossibiles quæ ibi inter affirmativas latebant hic latent inter negativas, ita ut his deductis restet unica tantum radix vere negativa.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes quæ diversis usibus inserviunt. *Possumus enim supponere radicem æquationis ex cognita & incognita aliqua quantitate utcunque componi, & perinde pro ea substituere quod æquipollens esse fingitur.* Ut si supponamus radicem æqualem esse summæ vel differentiæ cognitæ alicu-

alicujus & incognitæ quantitatis. Nam possumus hoc pacto radices æquationis cognita illa quantitate augere vel diminuere, vel de cognita quantitate subducere; atque ita efficere ut earum aliquæ quæ prius erant negativæ jam fiant affirmativæ, vel ut aliquæ ex affirmativis evadant negativæ; vel etiam ut omnes evadant affirmativæ aut omnes negativæ. Sic in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, si radices unitate augeri vellem, fingo $x + 1 = y$, seu $x = y - 1$, & perinde pro x scribo in æquatione $y - 1$, & pro quadrato, cubo, quadrato-quadrato de x similem potestatem de $y - 1$, ad hunc modum.

$x^4.$	$y^4 - 4y^3 + 6yy - 4y + 1$
$-x^3.$	$-y^3 + 3yy - 3y + 1$
$-19xx.$	$-19yy + 38y - 19$
$+49x.$	$+49y - 49$
$-30.$	-30
Summa	$y^4 - 5y^3 - 10yy + 80y - 96 = 0.$

Et æquationis prodeuntis $y^4 - 5y^3 - 10yy + 80y - 96 = 0$, radices erunt 2, 3, 4, -4, quæ prius erant 1, 2, 3, -5, unitate jam factæ majores. Quod si pro x scripsissem $y + 1\frac{1}{2}$ prodiisset æquatio $y^4 + 5y^3 - 10yy - \frac{5}{4}y + \frac{39}{16} = 0$, cujus duæ fuissent radices affirmativæ $\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$ ac duæ negativæ $-\frac{1}{2}$ & $-6\frac{1}{2}$. Pro x vero scribendo $y - 6$ prodiisset æquatio cujus radices fuissent 7, 8, 9, 1, omnes nimirum affirmativæ, & pro eodem scribendo $y + 4$ radices jam numero quaternario diminutæ evasissent -3, -2, -1, -9, negativæ omnes.

Et hoc modo augendo vel diminuendo radices siquæ impossibiles sunt, hæ aliquando facilius detegentur quam prius. Sic in æquatione $x^3 - 3aax$ $- 3a^3$

$-3a^3 = 0$, radices nullæ per præcedentem regulam apparent impoſſibiles. At ſi augeas radices quantitate a ſcribendo $y - a$ pro x, in æquatione reſultante $y^3 - 3ayy - a^3 = 0$, radices duæ impoſſibiles jam per regulam illam detegi poſſunt.

Eadem operatione poſſumus etiam ſecundos terminos æquationum tollere. Hoc enim fiet ſi cognitam quantitatem ſecundi termini æquationis propoſitæ per numerum dimenſionum æquationis diviſam, ſubducamus de quantitate quæ pro novæ æquationis radice ſignificanda aſſumitur, & reſiduum ſubſtituamus pro radice æquationis propoſitæ. Ut ſi proponatur æquatio $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$, cognitam quantitatem ſecundi termini quæ eſt -4 diviſam per numerum dimenſionum æquationis 3 ſubduco de ſpecie quæ pro nova radice ſignificanda aſſumitur, puta de y, & reſiduum $y + \frac{4}{3}$ ſubſtituo pro x, & provenit,

$$\begin{array}{rrrr} y^3 & +4yy & +\frac{16}{3}y & +\frac{64}{27} \\ & -4yy & -\frac{32}{3}y & -\frac{64}{9} \\ & & +4y & +\frac{16}{3} \\ & & & -6 \\ \hline y^3 & * & -\frac{4}{3}y & -\frac{146}{27} = 0. \end{array}$$

Eadem methodo poteſt & tertius æquationis terminus tolli. Proponatur æquatio $x^4 - 3x^3 + 3xx - 5x - 2 = 0$, & finge $x = y - e$, & ſubſtituendo $y - e$ pro x orietur hæc æquatio.

$$y^4 \begin{matrix} -4e \\ -3 \end{matrix} y^3 \begin{matrix} +6ee \\ +9e \\ +3 \end{matrix} yy \begin{matrix} -4e^3 \\ -9ee \\ -6e \\ -5 \end{matrix} y \left.\begin{matrix} +e^4 \\ +3e^3 \\ +3ee \\ +5e \\ -2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Hujus

Hujus æquationis tertius terminus eſt $6ee + 9e + 3$ ductum in yy. Ubi ſi $6ee + 9e + 3$ nullum eſſet, eveniret ipſum quod volumus. Fingamus itaque nullum eſſe ut inde colligamus quinam numerus ad hunc effectum ſubſtitui debet pro e; & habebimus æquationem quadraticam $6ee + 9e + 3 = 0$, quæ diviſa per 6 fiet $ee + \frac{3}{2}e + \frac{1}{2} = 0$, ſeu $ee = -\frac{3}{2}e - \frac{1}{2}$, & extracta radice $e = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}$, ſeu $= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$; hoc eſt $= -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$, atque adeo vel $= -\frac{1}{2}$ vel $= -1$. Unde $y - e$ erit vel $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$. Quamobrem cum $y - e$, ſcriptum fuit pro x, vice $y - e$ debet $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$ ſcribi pro x, ut tertius æquationis reſultantis terminus nullus ſit. Et in utroque quidem caſu id eveniet. Nam ſi pro x ſcribatur $y + \frac{1}{2}$ orietur hæc æquatio $y^4 - y^3 - \frac{15}{4}y - \frac{65}{16} = 0$; ſin ſcribatur $y + 1$, orietur hæc $y^4 + y^3 - 4y - 6 = 0$.

Poſſunt & radices æquationis per datos numeros multiplicari vel dividi; & hoc pacto termini æquationum diminui, fractioneſque & radicales quantitates aliquando tolli.

Ut ſi æquatio ſit $y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0$, ad tollendas fractiones fingo eſſe $y = \frac{1}{3}z$, & perinde pro y ſubſtituendo $\frac{1}{3}z$ provenit æquatio nova $\frac{z^3}{27} - \frac{12z}{27} - \frac{146}{27} = 0$, & rejecto terminorum communi denominatore, $z^3 - 12z - 146 = 0$, cujus æquationis radices ſunt triplo majores quam ante. Et rurſus ad diminuendos terminos æquationis hujus ſi ſcribatur $2v$ pro z, prodibit $8v^3 - 24v - 146 = 0$, & diviſis omnibus per 8 fiet $v^3 - 3v - 18\frac{1}{4} = 0$, cujus æquationis radices dimidiæ ſunt radicum prioris. Et hic ſi tandem inveni-

inveniatur v ponendum erit $2v = z$, $\frac{1}{3}z = y$, & $y + \frac{4}{3} = x$, & æquationis primo propositæ $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$ habebitur radix x.

Sic & in æquatione $x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0$, ad tollendam quantitatem radicalem $\sqrt{3}$, pro x scribo $y\sqrt{3}$, & provenit æquatio $3y^3\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$, quæ divisis omnibus terminis per $\sqrt{3}$ fit $3y^3 - 2y + 1 = 0$.

Rursus æquationis radices in earum reciprocas transmutari possunt, & hoc pacto æquatio aliquando ad formam commodiorem reduci.

Sic æquatio novissima $3y^3 - 2y + 1 = 0$, scribendo $\frac{1}{z}$ pro y evadit $\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0$, seu terminis omnibus multiplicatis per z^3, & ordine terminorum mutato $z^3 - 2zz + 3 = 0$. Potest etiam æquationis terminus penultimus hoc pacto tolli, si modo secundus prius tollatur, ut factum vides in exemplo præcedente. Aut si antepenultimum tolli cupias id fiet si modo tertium prius tollas. Sed & radix minima hoc pacto in maximam convertitur, & maxima in minimam; quod usum nonnullum habere potest in sequentibus. Sic in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, cujus radices sunt 3, 2, 1, -5, si scribatur $\frac{1}{y}$ pro x resultabit æquatio $\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{yy} + \frac{49}{y} - 30 = 0$, quæ, terminis omnibus multiplicatis per y^4 ac divisis per 30, signisque mutatis, fiet $y^4 - \frac{49}{30}y^3 + \frac{19}{30}yy + \frac{1}{30}y - \frac{1}{30} = 0$, cujus radices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{1}{5}$; radicum affirmativarum maxima 3 jam conversa in minimam $\frac{1}{3}$, & minima 1 jam facta maxima, & radice negativa -5 quæ om-

omnium maxime distabat à nihilo, jam omnium maxime accedente ad nihil.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes sed quæ omnes ad exemplum transmutationis illius ubi tertium æquationis terminum sustulimus confici possunt, ut non opus sit hac de re plura dicere. Addamus potius aliqua de limitibus æquationum.

Ex Æquationum generatione constat quod cognita quantitas secundi *termini æquationis, si signum ejus mutetur, æqualis sit aggregato omnium radicum sub signis propriis; ea* tertii *æqualis aggregato rectangulorum sub singulis binis radicibus; ea* quarti *si signum ejus mutetur, æqualis aggregato contentorum sub singulis ternis radicibus; ea* quinti *æqualis aggregato contentorum sub singulis quaternis; & sic in infinitum.*

Assumamus $x = a$, $x = b$, $x = -c$, $x = d$, &c. seu $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, $x - d = 0$, & ex horum continua multiplicatione generemus æquationes, ut supra. Jam multiplicando $x - a$ per $x - b$ producetur æquatio $xx \begin{smallmatrix} -a \\ -b \end{smallmatrix} x + ab = 0$; ubi cognita quantitas secundi termini, si signa ejus mutentur, nimirum $a + b$, est summa duarum radicum a & b, & cognita tertii ab illud unicum quod sub utraque continetur rectangulum. Rursus multiplicando hanc æquationem per $x + c$ producetur æquatio cubica $x^3 \begin{smallmatrix} -a \\ -b \\ +c \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} +ab \\ -ac \\ -bc \end{smallmatrix} x + abc = 0$, ubi cognita quantitas secundi sub signis mutatis nimirum $a + b - c$ est summa radicum a, b & $-c$; cognita tertii, $ab - ac - bc$, summa rectangulorum sub singulis binis a & b, a & $-c$, b & $-c$; & cognita quarti sub signo mutato $-abc$ illud unicum contentum est quod omnium con-

continua multiplicatione generatur, a in b in $-c$. Adhæc multiplicando cubicam illam æquationem per $x-d$ producetur hæcce quadrato-quadratica

$$x^4 \begin{matrix} -a \\ -b \\ +c \\ -d \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \\ +ad \\ +bd \\ -cd \end{matrix} xx \begin{matrix} +abc \\ -abd \\ +bcd \\ +acd \end{matrix} x - abcd = 0:$$

ubi cognita quantitas ſecundi termini ſub ſignis mutatis $a+b-c+d$, eſt ſumma omnium radicum; ea tertii $ab-ac-bc+ad+bd-cd$ ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis; ea quarti ſub ſignis mutatis $-abc+abd-bcd-acd$ ſumma contentorum ſub ſingulis ternis; ea quinti $-abcd$ contentum unicum ſub omnibus. Et hinc primo colligimus omnes æquationis cujuſcunque, terminos nec fractos nec ſurdos habentis, radices non ſurdas, & radicum binarum rectangula, ternarumque aut plurium contenta eſſe aliquos ex diviſoribus integris ultimi termini; atque adeo ubi conſtiterit nullum ultimi termini diviſorem, eſſe aut radicem æquationis, aut duarum radicum rectangulum pluriumve contentum, ſimul conſtabit nullam eſſe radicem radicumve rectangulum aut contentum niſi quod ſit ſurdum.

Ponamus jam cognitas quantitates terminorum æquationis ſub ſignis mutatis eſſe p, q, r, s, t, v, &c. eam nempe ſecundi p, tertii q, quarti r, quinti s, & ſic deinceps. Et ſignis terminorum probe obſervatis fiat $p=a$. $pa+2q=b$. $pb+qa+3r=c$. $pc+qb+ra+4s=d$. $pd+qc+rb+sa+5t=e$. $pe+qd+rc+sb+ta+6v=f$. & ſic in infinitum, obſervata ſerie progreſſionis.

Et erit a ſumma radicum, b ſumma quadratorum ex ſingulis radicibus, c ſumma cuborum, d ſumma quadrato-quadratorum, e ſumma quadrato-cuborum, f ſumma cubo-cuborum, & ſic in reliquis. Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ubi cognita quantitas ſecundi termini eſt -1, tertii -19, quarti $+49$, quinti -30; ponendum erit $1 = p$, $19 = q$, $-49 = r$, $30 = s$. Et inde orientur $a = (p =) 1$. $b = (pa + 2q = 1 + 38 =) 39$. $c = (pb + qa + 3r = 39 + 19 - 147 =) - 89$. $d = (pc + qb + ra + 4s = -89 + 741 - 49 + 120 =) 723$. Quare ſumma radicum erit 1, ſumma quadratorum radicum 39, ſumma cuborum -89, & ſumma quadrato-quadratorum 723. Nimirum æquationis illius radices ſunt 1, 2, 3 & -5, & harum ſumma $1 + 2 + 3 - 5$ eſt 1, ſumma quadratorum $1 + 4 + 9 + 25$ eſt 39, ſumma cuborum $1 + 8 + 27 - 125$ eſt -89, & ſumma quadrato-quadratorum $1 + 16 + 81 + 625$ eſt 723.

De limitibus Æquationum.

ET hinc colliguntur *limites* inter quos conſiſtent radices æquationis ubi nulla earum impoſſibilis eſt. Nam cum radicum omnium quadrata ſunt affirmativa, quadratorum ſumma affirmativa erit, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento, ſumma quadrato-quadratorum radicum omnium major erit quam quadrato-quadratum radicis maximæ, & ſumma cubo-cuborum major quam cubo-cubus radicis maximæ.

Quamobrem ſi limitem deſideres quem radices nullæ tranſgrediuntur, quære ſummam quadratorum radicum & extrahe ejus radicem quadraticam. Hæc enim radix major

jor *erit quam radix maxima æquationis.* Sed ad radicem maximam propius accedes si quæras *summam quadrato-quadratorum & extrahas ejus radicem quadrato-quadraticam, & adhuc* magis *si quæras summam cubo-cuborum & extrahas ejus radicem cubo-cubicam: Et ita in infinitum.*

Sic in æquatione præcedente radix quadratica summæ quadratorum radicum, seu $\sqrt{39}$, est $6\frac{1}{2}$ quam proxime, & $6\frac{1}{2}$ magis distat à nihilo quam ulla radicum 1, 2, 3, -5. At radix quadrato-quadratica summæ quadrato-quadratorum radicum nempe $\sqrt[4]{723}$ quæ est $5\frac{1}{5}$ circiter propius accedit ad radicem à nihilo remotissimam -5.

Si inter summam quadratorum & summam quadrato-quadratorum radicum inveniatur media proportionalis, erit ea paulo major quam summa cuborum radicum sub signis affirmativis connexorum. Et inde hujus mediæ proportionalis & summæ cuborum sub propriis signis, ut prius inventæ, semisumma erit major quam summa cuborum radicum affirmativarum, & semidifferentia major quam summa cuborum radicum negativarum.

Atque adeo maxima radicum affirmativarum minor erit quam radix cubica illius semisummæ, & maxima radicum negativarum minor quam radix cubica illius semidifferentiæ.

Sic in æquatione præcedente media proportionalis inter summam quadratorum radicum 39, & summam quadrato-quadratorum 723 est 168 circiter. Summa cuborum sub propriis signis supra erat -89. Hujus & 168 semisumma est $39\frac{1}{2}$, semidifferentia $128\frac{1}{2}$. Prioris radix cubica, quæ est $3\frac{1}{7}$ circiter, major est quam maxima radicum affirmativarum 3. Posterioris radix cubica quæ est

 $5\frac{1}{13}$

$5\frac{1}{21}$ proxime, tranſcendit radicem negativam — 5. Quo exemplo videre eſt quam prope ad radicem hac methodo acceditur ubi unica tantum radix negativa eſt vel unica affirmativa. *Et tamen propius adhuc accederetur*, ſi inter ſummam quadrato quadratorum radicum & ſummam cubo-cuborum media proportionalis inveniretur atque ex hujus, & ſummæ quadrato-cuborum radicum ſemiſumma & ſemidifferentia radices quadrato cubicæ extraherentur. Nam radix quadrato-cubica ſemiſummæ tranſcenderet maximam radicem affirmativam, & radix quadrato-cubica ſemidifferentiæ maximam ſeu extimam negativam, ſed exceſſu multo minore quam ante. Cum igitur radix quælibet, augendo vel diminuendo radices omnes fieri poteſt minima, dein minima in maximam converti, & poſtea omnes præter maximam fieri negativæ, conſtat quomodo radix imperata quam proxime poteſt obtineri.

Si radices omnes præter duas negativæ ſunt, poſſunt illæ duæ ſimul hoc modo erui.

Inventa juxta methodum præcedentem ſumma cuborum duarum illarum radicum, ut & ſumma quadrato-cuborum & ſumma quadrato-quadrato cuborum radicum omnium; inter poſteriores duas ſummas quære mediam proportionalem, & ea erit differentia inter ſummam cubo-cuborum radicum affirmativarum, & ſummam cubo-cuborum radicum negativarum quam proxime; adeoque hujus mediæ proportionalis & ſummæ cubo-cuborum radicum omnium ſemiſumma erit ſumma cubo-cuborum radicum affirmativarum, & ſemidifferentia erit ſumma cubo-cuborum radicum negativarum. Habita igitur tum ſumma cuborum, tum ſumma cubo-cuborum radicum duarum affirmativarum, de duplo ſummæ poſterioris aufer quadratum ſummæ prioris, & reliqui radix quadra-

tica

tica erit differentia cuborum duarum radicum. Habita vero tum summa tum differentia cuborum habentur cubi ipsi. Extrahe eorum radices cubicas & habebuntur æquationis radices duæ affirmativæ quam proxime. Et si in altioribus potestatibus opus consimile institueretur magis adhuc accederetur ad radices. Sed hæ limitationes ob difficilem calculum minus usui sunt, & ad æquationes tantum extendunt quæ nullas habent radices imaginarias. Quapropter limites alia ratione invenire jam docebo quæ & facilior sit & ad omnes æquationes extendat.

Multiplicetur æquationis terminus unusquisque per numerum dimensionum ejus, & dividatur factum per radicem æquationis. Dein rursus multiplicetur unusquisque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quam prius, & factum dividatur per radicem æquationis. Et sic pergatur semper multiplicando per numeros unitate minores quam prius, & factum dividendo per radicem, donec tandem termini omnes destruantur quorum signa diversa sunt à signo primi seu altissimi termini præter ultimum. Et numerus ille erit omni affirmativa radice major; qui in terminis prodeuntibus scriptus pro radice, efficit eorum qui singulis vicibus per multiplicationem producebantur aggregatum ejusdem semper esse signi cum primo seu altissimo termino æquationis.

Ut si proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 0$. Hanc primum sic multiplico $\overset{5}{x^5} - \overset{4}{2x^4} - \overset{3}{10x^3} + \overset{2}{30xx} + \overset{1}{63x} - \overset{0}{120}$. Dein terminos prodeuntes divisos per x rursum multiplico sic $\overset{4}{5x^4} - \overset{3}{8x^3} - \overset{2}{30xx} + \overset{1}{60x} + \overset{0}{63}$, & terminos prodeuntes rursum dividendo per x prodeunt $20x^3 - 24xx - 60x + 60$, quos minuendi gratia divido per maximum divisorem 4 & fiunt

 $5x^3$

$5x^3 - 6xx - 15x + 15$. Hi itidem multiplicati per progreſſionem 3. 2. 1. 0, & diviſi per x fiunt $15xx - 12x - 15$, & rurſum diviſi per 3 fiunt $5xx - 4x - 5$. Et hi multiplicati per progreſſionem 2. 1. 0, & diviſi per $2x$ fiunt $5x - 2$. Jam cum terminus æquationis altiſſimus x^5 affirmativus ſit, tento quinam numerus ſcriptus in his productis pro x, efficiet ea omnia affirmativa eſſe. Et quidem tentando 1, fit $5x - 2 = 3$ affirmativum ſed $5xx - 4x - 5$, fit -4 negativum. Quare limes erit major quam 1. Tento itaque numerum aliquem majorem puta 2. Et in ſingulis ſubſtituendo 2 pro x, evadunt

$$5x - 2 = 8$$
$$5xx - 4x - 5 = 7$$
$$5x^3 - 6xx - 15x + 15 = 1$$
$$5x^4 - 8x^3 - 30xx + 60x + 63 = 79$$
$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 46.$$

Quare cum numeri prodeuntes 8. 7. 1. 79. 46, ſint omnes affirmativi, erit numerus 2 major quam radicum affirmativarum maxima. Similiter ſi limitem negativarum radicum invenire vellem, tento numeros negativos. Vel quod perinde eſt muto ſigna terminorum alternorum & tento affirmativos. Mutatis autem terminorum alternorum ſignis, quantitates in quibus numeri ſubſtituendi ſunt fient

$$5x + 2$$
$$5xx + 4x - 5$$
$$5x^3 + 6xx - 15x - 15$$
$$5x^4 + 8x^3 - 30xx - 60x + 63$$
$$x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30xx + 63x + 120.$$

Ex his ſeligo quantitatem aliquam ubi termini negativi maxime prævalere videntur; puta $5x^4 + 8x^3$

-30

$-30xx-60x+63$, & hic ſubſtituendo pro x numeros 1 & 2 prodeunt numeri negativi -14 & -33. Unde limes erit major quam -2. Subſtituendo autem numerum 3 prodit numerus affirmativus 234. Et ſimiliter in cæteris quantitatibus ſubſtituendo numerum 3 pro x prodit ſemper numerus affirmativus. Id quod ex inſpectione ſola colligere licet. Quare numerus -3 tranſcendit omnes radices negativas. Atque ita habentur limites 2 & -3 inter quos radices omnes conſiſtunt.

Horum vero limitum inventio uſui eſt tum in reductione æquationum per radices rationales, tum in extractione radicum ſurdarum ex ipſis; ne forte radicem extra hos limites aliquando quæramus. Sic in æquatione noviſſima ſi radices rationales, ſiquas forte habeat, invenire vellem; ex ſuperioribus certum eſt has non alias eſſe poſſe quam diviſores ultimi termini æquationis, qui hic eſt 120. Proin tentando omnes ejus diviſores, ſi nullus earum ſcriptus in æquatione pro radice x efficeret omnes terminos evaneſcere; certum eſt æquationem non admittere radicem niſi quæ ſit ſurda. At ultimi termini 120, diviſores permulti ſunt, nimirum $1. -1. 2. -2. 3. -3. 4. -4. 5. -5. 6. -6. 8. -8. 10. -10. 12. -12. 15. -15. 20. -20. 24. -24. 30. -30. 40. -40. 60. -60. 120.$ & -120. Et hos omnes diviſores tentare, tædio eſſet. Cognito autem quod radices inter limites 2 & -3 conſiſtunt, liberamur à tanto labore. Jam enim non opus erit diviſores tentare niſi qui ſunt inter hos limites, nimirum diviſores $1, -1,$ & -2. Nam ſi horum nullus radix eſt, certum eſt æquationem non habere radicem niſi quæ ſit ſurda.

Æquationum reductio per divisores surdos.

HActenus reductionem æquationum tradidi quæ rationales divisores admittunt. Sed antequam æquationem quatuor, sex, aut plurium dimensionum irreducibilem esse concludere possumus, tentandum erit etiam annon per surdum aliquem divisorem reduci queat; vel quod perinde est, tentandum erit annon æquatio ita in duas æquales partes dividi possit ut ex utraque radix extrahatur. Id autem fiet per sequentem methodum.

Dispone æquationem secundum dimensiones literæ alicujus, ita ut omnes ejus termini sub signis suis conjunctim æquales sint nihilo, & terminus altissimus affirmativo signo afficiatur. Deinde si æquatio quadratica *sit (nam & hunc casum ob rei analogiam adjicere lubet) aufer utrobique terminum infimum, & adde quartam partem quadrati cognitæ quantitatis termini medii.*

Ut si æquatio sit $xx - ax - b = 0$, aufer utrobique $-b$ & adde $\frac{1}{4}aa$, & emerget $xx - ax + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$, *& extracta utrobique radice fiet* $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, sive $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$.

Quod si æquatio sit quatuor dimensionum, *sit ea* $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, ubi $p, q, r,$ & s, *denotant cognitas quantitates terminorum æquationis signis propriis affectas. Fac*

$$q - \frac{1}{4}pp = \alpha. \quad r - \frac{1}{2}\alpha p = \beta.$$
$$s - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta.$$

Dein

Dein pone pro n communem aliquem terminorum β & 2ζ divisorem integrum, & non quadratum, qui & impar esse debet & per 4 divisus unitatem relinquere, si terminorum p & r alteruter sit impar. Pone etiam pro k divisorem aliquem quantitatis $\frac{\beta}{n}$ si p sit par; vel imparis divisoris dimidium si p sit impar; vel nihil, si dividuum β sit nihil. Aufer Quotum de $\frac{1}{2}pk$, & reliqui dimidium dic l. Dein pro Q pone $\frac{\alpha + nkk}{2}$, & tenta si n dividat $QQ - s$, & Quoti radix sit rationalis & aequalis l. Si hoc contigerit ad utramque partem aequationis adde $nkkxx + 2nklx + nll$, & radicem extrahes utrobique, prodeunte $xx + \frac{1}{2}px + Q = n^{\frac{1}{2}}$ in $kx + l$.

Exempli gratia, proponatur æquatio $x^4 + 12x - 17 = 0$, & quia p & q hic desunt, & r eſt 12, & s eſt -17, ſubſtitutis hiſce numeris fiet $\alpha = 0$, $\beta = 12$, & $\zeta = -17$, & ipſorum β & 2ζ ſeu 12 & -34 communis diviſor unicus, nimirum 2, erit n. Porro $\frac{\beta}{n}$ eſt 6, & ejus diviſores 1, 2, 3, & 6 ſucceſſive tentandi ſunt pro k, & -3, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$ pro l reſpective. Eſt autem $\frac{\alpha + nkk}{2}$ id eſt kk æquale Q. Eſt & $\sqrt{\frac{QQ - s}{n}}$, id eſt $\sqrt{\frac{QQ + 17}{2}} = l$. Ubi numeri pares 2 & 6 ſcribuntur pro k, Q fit 4 & 36, & $QQ - s$ numerus erit impar adeoque dividi non poteſt per n ſeu 2. Quare numeri illi 2 & 6 rejiciendi ſunt. Ubi vero 1 & 3 ſcribuntur pro k, Q fit 1 & 9, & $QQ - s$ fit 18 & 98, qui numeri dividi poſſunt per n, & quotorum radices extrahi. Sunt enim ± 3 & ± 7: quarum tamen ſola -3 congruit cum l. Pono itaque

que $k = 1$, $l = -3$, & $Q = 1$, & quantitatem $nkkxx + 2nklx + nll$, id est $2xx - 12x + 18$, addo ad utramque partem æquationis, & prodit $x^4 + 2xx + 1 = 2xx - 12x + 18$, & extracta trobique radice, $xx + 1 = x\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$. Quod si radicis extractionem effugere malueris pone $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n} \times \overline{kx + l}$, & invenietur ut ante $xx + 1 = \pm\sqrt{2} \times \overline{x - 3}$. Et ex hac æquatione si radices iterum extrahas proveniet $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{\frac{-1}{2} \mp 3\sqrt{2}}$, *h. e.* secundum signorum variationes, $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$, & $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$. Item $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$, & $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$. Quæ quidem quatuor sunt radices æquationis sub initio propositæ $x^4 + 12x - 17 = 0$. Sed earum ultimæ duæ sunt impossibiles.

Proponamus jam æquationem $x^4 - 6x^3 - 58xx - 114x - 11 = 0$, & scribendo -6, -58, -114, & -11 pro p, q, r, & s respective, orietur $-67 = \alpha$, $-315 = \beta$, & $-1133\frac{1}{4} = \zeta$. Numerorum β & 2ζ, seu -315 & $-\frac{4533}{2}$, communis divisor est unicus 3, adeoque hic erit n, & ipsius $\frac{\beta}{n}$ seu -105 divisores sunt 3, 5, 7, 15, 21, 35, & 105, qui itaque tentandi sunt pro k. Quare tento primum 3, & quotum -35, qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k seu -105 per 3, subduco de $\frac{1}{2}pk$, seu -3×3, & restat 26; cujus dimidium 13 esse debet

debet l. Sed $\frac{\alpha + nkk}{2}$, seu $\frac{-67 + 27}{2}$ id est -20 erit Q, & $QQ - s$ erit 411, qui dividi potest per n seu 3, sed quoti 137 radix non potest extrahi. Quamobrem rejicio 3 & tento 5 pro k. Quotus qui jam prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, seu -105 per 5, est -21, & hunc subducendo de $\frac{1}{2}pk$ seu -3×5 restat 6, cujus dimidium 3 erit l. Est & Q seu $\frac{\alpha + nkk}{2}$ id est $\frac{-67 + 75}{2}$ numerus 4. Et $QQ - s$, seu $16 + 11$ dividi potest per n; & Quoti, qui est 9, radix extracta 3 congruit cum l. Quamobrem concludo esse $l = 3$, $k = 5$, $Q = 4$, & $n = 3$, & si $nkkxx + 2nklx + nll$, id est $75xx + 90x + 27$ ad utramque partem æquationis addatur, radicem utrobique extrahi posse, & prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n} \times \overline{kx + l}$, seu $xx - 3x + 4 = \pm\sqrt{3} \times \overline{5x + 3}$, & extracta iterum radice $x = \frac{3 \pm 5\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{17 \pm \frac{21\sqrt{3}}{2}}$.

Haud secus si proponatur æquatio hæcce $x^4 - 9x^3 + 15xx - 27x + 9 = 0$, scribendo -9, $+15$, -27, & $+9$, pro p, q, r, & s respective, emerget $-5\frac{1}{4} = \alpha$, $-50\frac{5}{8} = \beta$, & $2\frac{7}{64} = \zeta$. Ipsorum β & 2ζ, seu $-\frac{405}{8}$ & $\frac{135}{32}$ communes divisores sunt 3, 5, 9, 15, 27, 45, & 135; sed 9 quadratus est, & 3, 15, 27, 135 divisi per numerum 4 non relinquunt unitatem, ut ob imparem terminum p oporteret. His itaque rejectis restant soli 5 & 45 tentandi pro n. Ponamus primo $n = 5$, & ipsius $\frac{\beta}{n}$ seu $-\frac{81}{8}$ divisores impares dimidiati nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$, tentandi erunt pro

pro k. Si k ponatur $\frac{1}{2}$, quotus $-\frac{81}{4}$ qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſubductus de $\frac{1}{2}pk$ ſeu $-\frac{9}{4}$ relinquit 18 pro $2l$, & $\frac{\alpha + nkk}{2}$ ſeu -2 eſt Q, & $QQ - s$, ſeu -5 dividi quidem poteſt per n ſeu 5, ſed Quoti negativi -1 radix impoſſibilis eſt, quæ tamen deberet eſſe 9. Quare concludo k non eſſe $\frac{1}{2}$ & tentó jam ſi ſit $\frac{3}{2}$. Quotum qui oritur dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k ſeu $-\frac{81}{8}$ per $\frac{3}{2}$ nempe Quotum $-\frac{27}{4}$ ſubduco de $\frac{1}{2}pk$ ſeu $-\frac{27}{4}$ & reſtat o. Unde l jam nihil erit. Eſt autem $\frac{\alpha + nkk}{2}$ ſeu 3 æqualis Q, & $QQ - s$ nihil eſt; unde rurſus l, qui hujus $QQ - s$ diviſi per n radix eſt, invenitur nihil. Quamobrem his ita quadrantibus concludo eſſe $n = 5$, $k = \frac{3}{2}$, $l = 0$, & $Q = 3$, adeoque addendo ad utramque partem æquationis propoſitæ terminos $nkkxx + 2nlkx + nll$ id eſt $\frac{45}{4}xx$, & radicem quadraticam utrobique extrahendo prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n} \times \overline{kx + l}$, id eſt $xx - 4\frac{1}{2}x + 3 = \sqrt{5} \times \frac{3}{2}x$.

Eadem methodo reducuntur etiam æquationes literales. Ut ſi fuerit $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} + 2aa \\ - cc \end{matrix} xx - 2a^3x + a^4 = 0$, ſubſtituendo $-2a$, $2aa - cc$, $-2a^3$ & $+a^4$ pro $p, q, r,$ & s reſpective, obtinebuntur $aa - cc = \alpha$, $-acc - a^3 = \beta$, & $\frac{3}{4}a^4 + \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{4}c^4 = \zeta$. Quantitatum β & 2ζ diviſor communis eſt $aa + cc$ qui proinde erit n; & $\frac{\beta}{n}$ ſeu $-a$ diviſores habet 1 & a. Sed quia n duarum eſt dimenſionum, & $k\sqrt{n}$ non niſi unius eſſe debet, ideo k nullius erit, adeo-

adeoque non potest esse a. Sit ergo $k = 1$, & diviso $\frac{\beta}{n}$ per k aufer quotum $-a$ de $\frac{1}{2}pk$ seu $-a$ & restabit nihil pro l. Porro $\frac{\alpha + nkk}{2}$ seu aa est Q, & $QQ - s$ seu $a^4 - a^4$ nihil est; & inde rursus prodit nihil pro l. Quod arguit quantitates n, k, l, & Q recte inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis propositæ terminis $nkkxx + 2nklx + nll$, id est $aaxx + ccxx$, radicem utrobique extrahi posse, & extractione illa prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n} \times \overline{kx + l}$, id est $xx - ax + aa = \pm x\sqrt{aa + cc}$. Et extracta iterum radice $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} +$ vel $- \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$.

Hactenus regulam applicui ad extractionem *radicum surdarum*: potest tamen eadem ad extractionem etiam *rationalium* applicari, si modo pro quantitate n usurpetur unitas; eoque pacto una vice examinare possumus utrum æquatio fractis & surdis terminis carens divisorem aliquem duarum dimensionum aut rationalem aut surdum admittat. Ut si æquatio $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$ proponatur, substituendo -1, -5, $+12$, & -6, pro p, q, r, & s respective invenientur $-5\frac{1}{4} = \alpha$, $9\frac{3}{8} = \beta$, & ponendo $n = 1$, Quantitatis $\frac{\beta}{n}$ seu $\frac{75}{8}$ divisores sunt 1, 3, 5, 15, 25, 75; quorum dimidia (siquidem p sit impar) tentanda sunt pro k. Et si pro k tentemus $\frac{5}{2}$, fiet $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = -5$, &

ejus dimidium $-\frac{5}{2} = l$. Item $\frac{\alpha + nkk}{2.} = \frac{1}{2} = Q$, & $\frac{QQ - s}{n} = 6\frac{1}{4}$, cujus radix congruit cum l.

Concludo itaque quantitates n, k, l, Q recte inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis terminis $nkkxx + 2nklx + nll$, id est $6\frac{1}{4}xx - 12\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{4}$, radicem utrobique extrahi posse; & extractione illa prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \pm\sqrt{n} \times \overline{kx + l}$, id est $xx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \pm 1 \times \overline{2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}}$, seu $xx - 3x + 3 = 0$, & $xx + 2x - 2 = 0$, adeoque per hasce duas æquationes quadraticas, æquationem propositam quadrato-quadraticam dividi posse. Sed hujusmodi divisores rationales expeditius inveniuntur per aliam methodum supra traditam.

Siquando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ multi sunt divisores ita ut omnes pro k tentare molestum fuerit, potest eorum numerus cito minui quærendo omnes divisores quantitatis $\alpha s - \frac{1}{4}rr$. Nam horum alicui aut imparis alicujus dimidio debet quantitas Q æqualis esse. Sic in exemplo novissimo $\alpha s - \frac{1}{4}rr$ est $-\frac{9}{2}$, è cujus divisoribus 1, 3, 9 aut iisdem dimidiatis $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, aliquis debet esse Q. Quare sigillatim tentando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ divisores dimidiatos $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{2}$, & $\frac{75}{2}$ pro k, rejicio omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$, seu $-\frac{21}{8} + \frac{1}{2}kk$; id est Q esse aliquem è numeris 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. Scribendo autem $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, &c. pro k, prodeunt respective $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{51}{2}$, &c. pro Q, è quibus soli $-\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$ reperiuntur in prædictis numeris, 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, adeoque,

adeoque, cæteris rejectis, aut erit $k = \frac{3}{2}$, & $Q = -\frac{3}{2}$ aut $k = \frac{5}{2}$, & $Q = \frac{1}{2}$. Qui duo casus examinentur. Atque hactenus de æquationibus *quatuor* dimensionum.

Si æquatio sex *dimensionum reducenda est*, sit ea $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0$, & fac

$$q - \tfrac{1}{4}pp = \alpha. \quad r - \tfrac{1}{2}p\alpha = \beta. \quad s - \tfrac{1}{2}p\beta = \gamma.$$
$$\gamma - \tfrac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta. \quad t - \tfrac{1}{2}\alpha\beta = \eta. \quad v - \tfrac{1}{4}\beta\beta = \theta.$$
$$\zeta\theta - \tfrac{1}{4}\eta\eta = \lambda.$$

Dein sumatur pro n, communis aliquis terminorum 2ζ, η, 2θ divisor integer & non quadratus, nec per numerum quadratum divisibilis, qui etiam per numerum 4 divisus relinquit unitatem; si modo terminorum p, r, t aliquis sit impar. Pro k sumatur divisor aliquis integer quantitatis $\frac{\lambda}{2nn}$ si p sit par, vel divisoris imparis dimidium si p sit impar, vel nihil si λ nihil sit. Pro Q, quantitas $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$. Pro l divisor aliquis quantitatis $\frac{Qr - QQp - t}{n}$ si Q sit integer; vel divisoris imparis dimidium si Q sit fractus denominatorem habens numerum 2; vel nihil si dividuum istud $\frac{Qr - QQp - t}{n}$ sit nihil. Et pro R quantitas $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}Qp + nkl$. Dein tenta si $RR - v$ dividi possit per n, & Quoti radix extrahi; & præterea si radix ista æqualis sit tam quantitati $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$ quam quantitati $\frac{QQ + pR - nll - s}{2nk}$. Si hæc omnia evenerint, dic radicem illam m; & vice æquationis propositæ scribe hanc $x^3 + \frac{1}{2}pxx + Qx + R = \pm\sqrt{n} \times \overline{kxx + lx + m}$. Etenim

hæc

hæc æquatio, quadrando partes & auferendo utrobique terminos ad dextram, producet æquationem propositam Quod si ea omnia in nullo casu evenerint, reductio erit impossibilis, si modò prius constet æquationem per divisorem rationalem reduci non posse.

Exempli gratia, proponatur æquatio

$$x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 \begin{matrix} -2aabb \\ +2a^3b \\ -4ab^3 \end{matrix} xx \begin{matrix} +3aab^4 \\ -a^4bb \end{matrix} = 0,$$

& scribendo $-2a$, $+2bb$, $+2abb$, $-2aabb+2a^3b-4ab^3$, 0, & $3aab^4-a^4bb$ pro p, q, r, s, t, & v respective, prodibunt $2bb-aa=\alpha$. $4abb-a^3=\beta$. $2a^3b+2aabb-4ab^3-a^4=\gamma$. $-b^4+2a^3b+3aabb-4ab^3-\frac{5}{4}a^4=\zeta$. $-\frac{1}{2}a^5+3a^3bb-4ab^4=\eta$. & $-aab^4+a^4bb-\frac{1}{4}a^6=\theta$. Et terminorum 2ζ, η, & 2θ communis divisor est $aa-2bb$, seu $2bb-aa$ perinde ut aa vel $2bb$ majus sit. Sed esto aa majus quam $2bb$, & $aa-2bb$ erit n. Debet enim n semper affirmativum esse. Porro $\frac{\zeta}{n}$ est $-\frac{5}{4}aa+2ab+\frac{1}{2}bb$; $\frac{\eta}{n}$ est $-\frac{1}{2}a^3+2abb$, & $\frac{\theta}{n}$ est $-\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}aabb$; adeoque $\frac{\zeta}{2n}\times\frac{\theta}{n}-\frac{\eta\eta}{8nn}$ seu $\frac{\lambda}{2nn}$ est $\frac{1}{8}a^6-\frac{1}{4}a^5b-\frac{1}{8}a^4bb+\frac{1}{2}a^3b^3-\frac{3}{8}aab^4$, cujus divisores sunt 1, a, aa; sed quia $\sqrt{n}\times k$ non nisi unius dimensionis esse potest, & $\sqrt{n}$ unius est, ideo k nullius erit; proinde non nisi numerus esse potest. Quare rejectis a & aa, restat solum 1 pro k. Præterea $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$ dat nihil pro Q, & $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ etiam nihil est; adeoque l,

qui

qui ejus divisor esse debet, erit nihil. Denique $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}pQ + nkl$ dat abb pro R. Et $RR - v$, est $-2aab^4 + a^4bb$, quod dividi potest per n seu $aa - 2bb$, & quoti $aabb$ radix extrahi, & radix illa negative sumpta, nempe $-ab$, indefinitæ quantitati $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$ seu $\frac{0}{0}$ non est inæqualis, quantitati vero definitæ $\frac{QQ + pR - nll - s}{2nk}$ æqualis est. Quamobrem radix illa $-ab$ erit m; & loco æquationis propositæ scribi potest $x^3 + \frac{1}{2}pxx + Qx + R = \sqrt{n} \times \overline{kxx + lx + m}$, i.e. $x^3 - axx + abb = \sqrt{aa - 2bb} \times \overline{xx - ab}$. Cujus conclusionis veritatem probare potes quadrando partes æquationis inventæ & auferendo terminos ad dextram ex utraque parte. Ea enim operatione producetur æquatio $x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 - 2aabbxx + 2a^3bxx - 4ab^3xx + 3aab^4 - a^4bb = 0$, quæ reducenda proponebatur.

Si æquatio est octo *dimensionum sit ea* $x^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + vxx + wx + z = 0$, & fiat $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$. $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$. $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$. $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$. $v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \epsilon$. $w - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$. & $z - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$. Et terminorum 2δ, 2ϵ, 2ζ, 8η, quære communem divisorem qui integer sit, & non quadratus nec per quadratum divisibilis, quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem, si modo terminorum alternorum p, r, t, w aliquis sit impar. Si nullus est ejusmodi divisor communis, certum est æquationem per extractionem surdæ radicis quadraticæ reduci non posse, & si non potest ea ita reduci, vix occurret illarum omnium quatuor quantitatum divisor communis. Opusculum igitur hactenus institutum examinatio quædam est utrum æquatio reducibilis sit necne, adeoque cum

ejuſmodi reductiones raro poſſibiles ſint, finem operi ut plurimum imponet.

Et ſimili ratione ſi æquatio ſit decem, duodecim, vel plurium dimenſionum, impoſſibilitas reductionis cognoſci poteſt.

Ut ſi ea ſit $x^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx^6 + tx^5 + vx^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, faciendum erit $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$, $a - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$, $c - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta$, $d - \frac{1}{4}\delta\delta = \kappa$, & quærendus communis diviſor terminorum quinque 2ε, 2ζ, 8η, 4θ, 8κ, qui integer ſit & non quadratus, quique etiam per 4 diviſus relinquat unitatem ſi modo terminorum alternorum p, r, t, a, c aliquis ſit impar.

Sic ſi *duodecim* dimenſionum æquatio ſit $x^{12} + px^{11} + qx^{10} + rx^9 + sx^8 + tx^7 + vx^6 + ax^5$ $bx^4 + cx^3 + dxx + ex + f = 0$, faciendum erit $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$, $a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$, $c - \frac{1}{2}\beta\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta$, $d - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon - \frac{1}{4}\delta\delta = \kappa$, $e - \frac{1}{2}\delta\varepsilon = \lambda$, $f - \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon = \mu$, & quærendus communis diviſor integer & non quadratus terminorum ſex 2ζ, 8η, 4θ, 8κ, 4λ, 8μ qui per 4 diviſus relinquat unitatem, ſi modo terminorum alternorum p, r, t, a, c, e aliquis ſit impar.

Atque ita in infinitum progredi licebit, & æquatio propoſita ſemper per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ irreducibilis erit ubi ejuſmodi diviſor communis nullus eſt. Siquando vero ejuſmodi diviſor n inventus ſpem faciat futuræ reductionis, poteſt ea inſtitui inſiſtendo veſtigiis operis quod in æquatione octo dimenſionum ſubjungimus.

Quære

Quære numerum quadratum cui per n multiplicato ultimus æquationis terminus z, sub signo proprio adnexus quadratum numerum efficit. Id autem expedite fiet si ad z ubi n est par vel ad $4z$ ubi n est impar successive addantur n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, $11n$, & deinceps donec summa æqualis fiat numero alicui in tabula numerorum quadratorum quam ad manus esse suppono. Et si nullus ejusmodi quadratus numerus prius occurrit quam summæ illius radix quadratica aucta radice quadratica excessus illius summæ supra ultimum æquationis terminum, quadruplo major sit quam maximus terminorum æquationis propositæ p, q, r, s, t, v, &c. non opus erit rem ultra tentare. Æquatio enim reduci non potest. Sed si ejusmodi numerus quadratus prius occurrit, sit ejus radix S, si n est par, vel $2S$ si n est impar; & $\sqrt{\frac{SS-z}{n}}$ dic h. Debent autem s & h esse numeri integri si n est par, at si n impar est, possunt esse fracti denominatorem habentes numerum binarium. Et si unus eorum fractus est, alter fractus esse debet. Quod idem de numeris R & m, Q & l, p & k, post inveniendis observandum est. Et omnes numeri S & h, qui intra præfatum limitem inveniri possunt in catalogum referendi sunt.

Postea pro k tentandi sunt omnes numeri successive qui non efficiunt $nk \pm \frac{1}{2}p$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & ponendum est in omni casu $\frac{nkk+\alpha}{2} = Q$. Dein pro l tentandi sunt successive numeri omnes qui non efficiunt $nl \pm Q$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & in omni tentamine ponendum $\frac{-npkk+2\beta}{4} + nkl = R$. Denique pro m

tentandi ſunt ſucceſſive omnes numeri qui non efficiunt $nm \pm R$ quadruplo majus quam maximus terminorum æquationis, & videndum an in caſu quovis ſi fiat $s - QQ - pR + nll = 2H$, & $H + nkm = S$, ſit S aliquis numerorum qui prius pro S in Catalogum relati erant; & præterea ſi alter numerus ei S reſpondens, qui pro h in eundem Catalogum relatus erat ſit his tribus $\frac{2RS - w}{2nm}$, $\frac{2QS + RR - v - nmm}{2nl}$ & $\frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk}$ æqualis. Si hæc omnia in aliquo caſu evenerint, vice æquationis propoſitæ ſcribenda erit hæcce $x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qxx + Rx + S = \sqrt{n} \times \overline{kx^3 + lxx + mx + h}$.

Exempli gratia proponatur æquatio $x^8 + 4x^7 - x^6 - 10x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 10xx - 10x - 5 = 0$. Et erit $q - \frac{1}{4}pp = -1 - 4 = -5 = \alpha$. $r - \frac{1}{2}p\alpha = -10 + 10 = 0 = \beta$. $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = 5 - \frac{25}{4} = -\frac{5}{4} = \gamma$. $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = -5 + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} = \delta$. $v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = -10 - \frac{25}{8} = -\frac{105}{8}$. $w - \frac{1}{2}\beta\gamma = -10 = \zeta$. $z - \frac{1}{4}\gamma\gamma = -5 - \frac{25}{64} = -\frac{345}{64} = \eta$. Ergo $2\delta, 2\varepsilon, 2\zeta, 8\eta$, reſpective, ſunt -5, $-\frac{105}{4}$, -20, & $-\frac{345}{8}$, & earum diviſor communis 5, qui per 4 diviſus relinquit 1, perinde ut ob terminum imparem s oportuit. Cum itaque inventus ſit diviſor communis n ſeu 5 qui ſpem facit futuræ reductionis, quoniam iſte impar eſt, ad $4z$ ſeu -20 ſucceſſive addo n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, &c. ſeu 5, 15, 25, 35, 45, &c. & prodeunt -15. 0. 25. 60. 105. 160. 225. 300. 385. 480. 585. 700. 825. 960. 1105. 1260. 1425. 1600. Ex quibus ſolum 0. 25. 225, & 1600 quadrati ſunt. Quare horum radices dimidiatæ 0, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, 20, in catalogum referendæ ſunt pro S, & $\sqrt{\frac{SS - z}{n}}$, id

eſt

eſt 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, 9, reſpective pro h. Sed quia $S + nh$ ſi ſcribatur 20 pro S & 9 pro h, fit 65 numerus major quadruplo maximi terminorum æquationis, ideo rejicio 20 & 9, & reliquos ſolum refero in tabulam ut ſequitur.

h	$1. \frac{3}{2}. \frac{7}{2}.$
S	$0. \frac{5}{2}. \frac{15}{2}.$

His ita diſpoſitis, tento pro k numeros omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}p \pm nk$ ſeu $2 \pm 5k$ majus quadruplo maximi termini æquationis 40, id eſt numeros $-8. -7. -6. -5. -4. -3. -2. -1. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7$, ponendo $\frac{nkk + \alpha}{2}$ ſeu $\frac{5kk - 5}{2}$ id eſt numeros $\frac{315}{2}. 120. \frac{175}{2}. 60. \frac{75}{2}. 20. \frac{15}{2}. 0. -\frac{5}{2}. 0. \frac{15}{2}. 20. \frac{75}{2}. 60. \frac{175}{2}. 120.$ reſpective pro Q. Imo vero cum $Q \pm nl$, & multo magis Q non debeat majus eſſe quam 40, rejiciendos eſſe ſentio $\frac{315}{2}. 120. \frac{175}{2}$ & 60, & qui his reſpondent $-8. -7. -6. -5. 5. 6. 7.$ adeoque ſolos $-4. -3. -2. -1. 0. 1. 2. 3. 4$ pro k & $\frac{75}{2}. 20. \frac{15}{2}. 0. -\frac{5}{2}. 0. \frac{15}{2}. 20. \frac{75}{2}$ pro Q reſpective tentandos. Tentemus autem -1 pro k & 0 pro Q, & in hoc caſu pro l tentandi deinceps erunt ſucceſſive omnes numeri qui non efficiunt $Q \pm nl$ majus quam 40, id eſt omnes numeri inter 10 & -10, & pro R reſpective numeri $\frac{2\beta - npkk}{4} + nkl$, ſeu $-5 - 5l$ id eſt $-55. -50. -45. -40. -35. -30. -25. -20. -15. -10. -5. 0. 5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45$, quorum tamen tres priores & ultimum quia majores quam 40 negligere licebit. Tentemus autem -2 pro l & 5 pro R, & in hoc caſu pro m tentandi præterea erunt omnes numeri qui non efficiunt $R \pm nm$ ſeu $5 \pm 5m$ majus quam 40, id eſt numeri omnes inter 7 & -9, & videndum an ſi ponendo $s - QQ - pR + nll$, id eſt $5 - 20 + 20$ ſeu $5 = 2H$, ſit

fit $H + nkm$ seu $\frac{5}{2} - 5m = S$, id est si ex his numeris $\frac{-65}{2}. \frac{-55}{2}. \frac{-45}{2}. \frac{-35}{2}. \frac{-25}{2}. \frac{-15}{2}. \frac{-5}{2}. \frac{5}{2}. \frac{15}{2}. \frac{25}{2}. \frac{35}{2}. \frac{45}{2}. \frac{55}{2}. \frac{65}{2}. \frac{75}{2}. \frac{85}{2}$, aliquis æqualis sit alicui numerorum $0. \pm\frac{5}{2}. \pm\frac{15}{2}$ qui prius in tabulam pro S relati erant. Et hujusmodi quatuor occurrunt $-\frac{15}{2}. -\frac{5}{2}. \frac{5}{2}. \frac{15}{2}$ quibus respondent $\pm\frac{7}{2}. \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}. \pm\frac{7}{2}$ pro h in eadem tabula scripti, ut & $2. 1. 0. -1$ pro m substitui. Verum tentemus $-\frac{5}{2}$ pro S, 1 pro m, & $\pm\frac{3}{2}$ pro h, & fiet $\frac{2RS-w}{2nm} = \frac{-25+10}{10} = -\frac{3}{2}$, & $\frac{2QS+RR-v-nmm}{2nl} = \frac{25+10-5}{-20} = -\frac{3}{2}$, & $\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk} = \frac{-10+5+20}{-10} = -\frac{3}{2}$.
Quare cum prodeat omni casu $-\frac{3}{2}$ seu h, concludo numeros omnes recte inventos esse, adeoque vice æquationis propositæ scribendum esse $x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qxx + Rx + S = \sqrt{n} \times \overline{kx^3 + lxx + mx + h}$, id est $x^4 + 2x^3 + 5x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{5} \times \overline{-x^3 - 2xx + x - 1\frac{1}{2}}$. Etenim quadrando partes hujus, producetur æquatio illa octo dimensionum quæ sub initio proponebatur.

Quod si tentando casus omnes numerorum, prædicti valores omnes ipsius h nullo in casu inter se consensissent, argumento fuisset æquationem per extractionem surdæ radicis quadraticæ reduci non potuisse.

Deberent autem aliqua hic in operis abbreviationem annotari, sed quæ brevitatis causa prætereo, cum tantarum reductionum perexiguus sit usus, & rei possibilitatem potius quam praxin commodissimam voluerim exponere. Sunt igitur hæ reductiones æquationum per extractionem *surdæ radicis quadraticæ*.

Ad-

Adjungere jam liceret reductiones æquationum per *extractionem surdæ radicis cubicæ*, sed & has, ut quæ perraro utiles sint, brevitatis gratia prætereo.

Sunt tamen reductiones quædam *cubicarum æquationum* vulgo notæ, quas, si penitus præterirem, Lector fortasse desideraret. Proponatur æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, cujus secundus terminus deest. Ad hanc enim formam æquationem omnem cubicam reduci posse constat ex præcedentibus. Et supponatur x esse $= a + b$. Erit $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ (id est x^3) $+ qx + r = 0$. Sit $3aab + 3abb$ (id est $3abx$) $+ qx = 0$, & erit $a^3 + b^3 + r = 0$. Per priorem æquationem est $b = -\frac{q}{3a}$, & cubice $b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}$. Ergo per posteriorem est $a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0$, seu $a^6 + ra^3 = \frac{q^3}{27}$, & per extractionem affectæ radicis quadraticæ $a^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. Extrahe radicem cubicam & habebitur a. Et supra erat $-\frac{q}{3a} = b$, & $a + b = x$. Ergo $a - \frac{q}{3a}$ radix est æquationis propositæ.

Exempli gratia proponatur æquatio $y^3 - 6yy + 6y + 12 = 0$. Ad tollendum secundum æquationis hujus terminum ponatur $x + 2 = y$, & orietur $x^3 * - 6x + 8 = 0$, ubi est $q = -6$, $r = 8$, $\frac{1}{4}rr = 16$, $\frac{q^3}{27} = -8$, $a^3 = -4 \pm \sqrt{8}$, $a - \frac{q}{3a} = x$, & $x + 2 = y$, id est $2 + \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}} = y$.

Et hoc modo erui poſſunt radices omnium cubicarum æquationum ubi q affimativum eſt; vel etiam ubi q negativum eſt, & $\frac{q^3}{27}$ non majus quam $\frac{1}{4}rr$, *id eſt ubi duæ ex radicibus æquationis ſunt impoſſibiles.* At ubi q negativum eſt, & $\frac{q^3}{27}$ ſimul majus quam $\frac{1}{4}rr$, fit $\sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{q^3}{27}}$ quantitas impoſſibilis, atque adeo æquationis radix x vel y, hoc caſu impoſſibilis erit. Scilicet hoc caſu *tres ſunt radices poſſibiles* quæ omnes eodem modo ſe habent ad æquationis terminos q & r, & indifferenter deſignantur per literam x vel y, adeoque omnes eadem deberent lege erui & exprimi qua una aliqua eruitur & exprimitur: *Sed omnes tres lege præfata exprimere impoſſibile eſt.* Quantitas $a - \frac{q}{3a}$ qua x deſignatur multiplex eſſe non poteſt, eaque de cauſa Hypotheſis quod x, hoc in caſu ubi triplex eſt, æqualis eſſe poteſt binomio $a - \frac{q}{3a}$, ſeu $a + b$ cujus nominum cubi $a^3 + b^3$ conjunctim æquentur r, & triplum rectangulum $3ab$ æquetur q, plane impoſſibilis eſt; & ex hypotheſi impoſſibili concluſionem impoſſibilem colligi mirum eſſe non debet.

Eſt & alius modus has radices exprimendi. Nimirum de $a^3 + b^3 + r$ id eſt de nihilo, aufer $a^3 + r$, ſeu $\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$, & reſtabit $b^3 = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. Eſt itaq; $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$,

&

& $b=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$; vel $a=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$, & $b=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$, adeoque horum summa $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$, erit $=x$.

Possunt etiam æquationum biquadraticarum radices mediantibus cubicis erui & exprimi.

Tollendus est autem primum secundus æquationis terminus. Sit æquatio resultans $x^4+qxx+rx+s=0$. Pone hanc multiplicatione duarum $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$ generari, id est eandem esse cum hac $x^4 * \begin{matrix}+f\\+g\\-ee\end{matrix}\,xx\begin{matrix}+eg\\-ef\end{matrix}\,x+fg=0$, & collatis terminis fiet $f+g-ee=q$, $eg-ef=r$, & $fg=s$. Quare $q+ee=f+g$, $\frac{r}{e}=g-f$, $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$. $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$. $\frac{qq+2eeq+e^4-\frac{rr}{ee}}{4}(=fg)=s$, & per reductionem $e^6+2qe^4\begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix}\,ee-rr=0$. Pro ee scribe y, & fiet $y^3+2qyy\begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix}\,y-rr=0$, æquatio cubica cujus terminus secundus tolli potest, & radix deinceps per regulam præcedentem vel secus extrahi. Dein habita illa radice regrediendum erit ponendo $\sqrt{y}=e$, $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$, $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$, & æquationes duæ $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g$

$+g=0$, extractis earum radicibus dabunt quatuor radices æquationis biquadraticæ $x^4+qxx+rx+s=0$, nimirum $x=-\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-f}$, & $x=\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-g}$. Ubi notandum eſt quod ſi æquationis biquadraticæ radices quatuor poſſibiles ſunt, æquationis cubicæ $y^3+2qyy\frac{+qq}{-4s}y-rr=0$ radices tres poſſibiles erunt, atque adeo per regulam præcedentem extrahi nequeunt. *Sic & ſi æquationis quinque vel plurium dimenſionum radices affectæ in radices non affectas mediis æquationis terminis quoque pacto ſublatis convertantur, illa radicum expreſſio ſemper erit impoſſibilis ubi plures quam una radix in æquatione imparium dimenſionum poſſibiles ſunt, aut plures quam duæ in æquatione parium dimenſionum quæ per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ methodo ſupra expoſita reduci nequeunt.*

Docuit *Carteſius* æquationem biquadraticam per regulas ultimo traditas reducere. *E. g.* proponatur æquatio à nobis ſupra reducta $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$. Tolle ſecundum terminum ſcribendo $v+\frac{1}{4}$ pro x, & orietur $v^4-\frac{43}{8}vv+\frac{75}{8}v-\frac{855}{256}=0$. Ad tollendas fractiones ſcribe $\frac{1}{4}z$ pro v, & orietur $z^4-86zz+600z-851=0$. Hic eſt $-86=q$, $600=r$, & $-851=s$, adeoque $y^3+2qyy\frac{+qq}{-4s}y-rr=0$, ſubſtitutis æquipollentibus fiet $y^3-172yy+10800y-360000=0$. Ubi tentando omnes ultimi termini diviſores 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, & deinceps uſque ad 100 invenietur tandem $y=100$. Quod idem multo expeditius per methodum à nobis ſupra expoſitam invenire potuit. Dein habito y, radix ejus 10 erit e, & $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}$, id eſt $\frac{-86+100-60}{2}$,

ſeu

ſeu -23 erit f, & $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}$ ſeu 37 erit g, adeoque æquationes $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$, ſcripto z pro x, & ſubſtitutis æquipollentibus evadent $zz+10z-23=0$, & $zz-10z+37=0$. Reſtitue v pro $\frac{1}{4}z$, & orientur $vv+2\frac{1}{2}v-\frac{23}{16}=0$, & $vv-2\frac{1}{2}v+\frac{37}{16}=0$. Reſtitue inſuper $x-\frac{1}{4}$ pro v, & emergent $xx+2x-2=0$, & $xx-3x+3=0$, æquationes duæ quarum radices quatuor $x=-1\pm\sqrt{3}$, & $x=1\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$, eædem ſunt cum radicibus quatuor æquationis biquadraticæ ſub initio propoſitæ $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$. Sed hæ facilius per methodum inveniendi diviſores à nobis ſupra explicatam invenire potuerunt.



ÆQUA-



ÆQUATIONUM

Conſtructio linearis.

HActenus æquationum proprietates; tranſmutationes, limites & omnis generis reductiones, docui. Demonſtrationes non ſemper adjunxi quoniam ſatis faciles mihi viſæ ſunt, & nonnunquam abſque nimiis ambagibus tradi non poſſent. Reſtat jam tantum ut æquationum poſtquam ad formam commodiſſimam reductæ ſunt, radices in numeris extrahere doceam. Et hic præcipua difficultas eſt in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis. Id quod commodiſſime per æquationis conſtructionem aliquam ſeu Geometricam ſive Mechanicam confit. Qua de cauſa non pigebit hujuſmodi conſtructiones aliquas ſubjungere.

Veteres, ut ex Pappo diſcimus, triſectionem anguli, & inventionem duarum medie proportionalium, ſub initio per rectam lineam & circulum, fruſtra aggreſſi ſunt. Poſtea conſiderare cœperunt alias

alias permultas lineas, ut Conchoidem, Cissoidem, & Conicas sectiones, & per harum aliquas solverunt Problemata. Tandem re penitius examinata, & Conicis sectionibus in Geometriam receptis Problemata distinxerunt in tria genera: *Plana* quæ per lineas, à plano originem derivantes, Rectam nempe & Circulum solvi possint; *Solida* quæ per lineas ortum à solidi id est Coni consideratione derivantes solvebantur; & *Linearia* ad quorum solutionem requirebantur lineæ magis compositæ. Et juxta hanc distinctionem, problemata solida per alias lineas quam Conicas sectiones solvere à Geometria alienum est; præsertim si nullæ aliæ lineæ præter rectam, circulum, & Conicas sectiones inGeometriam recipiantur. At Recentiores longius progressi receperunt lineas omnes in Geometriam quæ per æquationes exprimi possunt, & pro dimensionibus æquationum distinxerunt lineas illas in genera, legemque tulerunt non licere Problema per lineam superioris generis construere quod construi potest per lineam inferioris. In lineis contemplandis, & eruendis earum proprietatibus, distinctionem earum in genera juxta dimensiones æquationum per qnas definiuntur laudo. At æquatio non est, sed descriptio quæ curvam Geometricam efficit. Circulus linea Geometrica est, non quod per æquationem exprimi potest; sed quod descriptio ejus postulatur. Æquationis simplicitas non est, sed descriptionis facilitas, quæ lineam ad constructiones Problematum prius admittendam esse indicat. Nam æquatio ad Parabolam simplicior est quam æquatio ad circulum; & tamen circulus ob simpliciorem descriptionem prius admittitur. Circulus & Coni sectiones si æquationum dimensiones spectentur ejusdem sunt ordinis, & tamen circulus in constructione problematum non connumeratur

cum

cum his, sed ob simplicem descriptionem deprimitur ad ordinem inferiorem lineæ rectæ; ita ut per circulum construere quod per rectas construi potest, non sit illicitum; per Conicas vero sectiones construere quod per circulum construi potest vitio vertatur. Aut igitur legem à dimensionibus æquationum in circulo observandam esse statue, & sic distinctionem inter problemata plana & solida ut vitiosam tolle; aut concede legem illam in lineis superiorum generum non ita observandam esse quin aliquæ ob simpliciorem descriptionem præferantur aliis ejusdem ordinis, & in constructione Problematum cum lineis inferiorum ordinum connumerentur. In constructionibus quæ sunt æque Geometricæ præferendæ semper sunt simpliciores. Hæc lex omni exceptione major est. Ad simplicitatem vero constructionis expressiones Algebraicæ nil conferunt. Sòlæ descriptiones linearum hic in censum veniunt. Has solas considerabant Geometræ qui circulum conjungebant cum recta. Prout hæ sunt faciles vel difficiles constructio facilis vel difficilis redditur. Adeoque à rei natura alienum est leges constructionibus aliunde præscribere. Aut igitur lineas omnes præter rectam & circulum & forte Conicas sectiones è Geometria cum Veteribus excludamus, aut admittamus omnes secundum descriptionis simplicitatem. Si Trochoides in Geometriam reciperetur, liceret ejus beneficio angulum in data ratione secare. Numquid ergo reprehenderes siquis hac linea ad dividendum angulum in ratione numeri ad numerum uteretur, & contenderes hanc lineam per æquationem non definiri, lineas vero quæ per æquationes definiuntur adhibendas esse? Igitur si angulus *e.g.* in 10001 partes dividendus esset, teneremur curvam lineam æquatione plusquam centum dimensionum definitam in medium afferre, quam tamen nemo mortalium

lium describere nedum intelligere valeret; & hanc anteponere Trochoidi quæ linea notissima est, & per motum rotæ vel circuli facillime describitur. Quod quam absurdum sit quis non videt? Aut igitur Trochoides in Geometriam non est admittenda, aut in constructione Problematum curvis omnibus difficilioris descriptionis auteferenda. Et eadem est ratio de reliquis curvis. Quo nomine trisectiones anguli per Conchoidem quas *Archimedes* in Lemmatis & *Pappus* in collectionibus posuere præ aliorum hac de re inventis omnibus laudamus; siquidem lineas omnes præter rectam & circulum è Geometria excludere debeamus, aut secundum descriptionis simplicitatem admittere, & Conchoides simplicitate descriptionis nulli curvapræter circulum cedit. Æquationes sunt expressiones computi Arithmetici, & in Geometria locum proprie non habent, nisi quatenus quantitates vere Geometricæ (id est lineæ, superficies, solida & proportiones) aliquæ aliis æquales enunciantur. Multiplicationes, Divisiones, & ejusmodi computa in Geometriam recens introducta sunt; idque inconsulto, & contra primum institutum scientiæ hujus. Nam qui constructiones Problematum per rectam & circulum à primis Geometris adinventas considerabit, facile sentiet Geometriam excogitatam esse ut expedito linearum ductu effugeremus computandi tædium. Proinde hæ duæ scientiæ confundi non debent. Veteres tam sedulo distinguebant eas ab invicem, ut in Geometriam terminós Arithmeticos nunquam introduxerint. Et recentes utramque confundeudo amiserunt simplicitatem in qua Geometriæ elegantia omnis consistit. Est itaque *Arithmetice* quidem simplicius quod per simpliciores æquationes determinatur, at *Geometrice* simplicius est quod per simpliciorem ductum linearum colligitur; & in Geometria prius &

& præstantius esse debet quod est ratione Geometricà simplicius. Mihi igitur vitio vertendum non erit si cum Mathematicorum Principe, *Archimede*, aliisque Veteribus Conchoidem ad Solidorum problematum constructionem adhibeam. Attamen siquis aliter senserit, sciat me hic de constructione non Geometrica sed qualicunque sollicitum esse, qua radices æquationum in numeris proxime assequar. Cujus rei gratia præmitto hoc Problema Lemmaticum.



Inter datas duas lineas AB, AC rectam datæ longitudinis BC ponere quæ producta transeat per datum punctum P.

SI circa polum P gyret linea BC, & ſimul termino ejus C incedat ſuper recta AC, ejus alter terminus B deſcribet Conchoidem Veterum. Secet hæc lineam AB in puncto B. Junge PB, & ejus pars BC erit recta quam ducere oportuit. Et eadem lege linea BC duci poteſt ubi vice rectæ AC linea aliqua curva adhibetur.

Sicui conſtructio hæcce per Conchoidem minus placeat, poteſt alia per Conicam ſectionem ejus

H A F G B E P C D

vice ſubſtitui. A puncto P ad rectas AD, AE age PD, PE conſtituentes parallelogrammum EADP, & à punctis C ac D ad rectam AB demitte perpendicula CF, DG, ut & à puncto E ad rectam AC verſus A productam perpendiculum EH, & dictis $AD = a$. $PD = b$. $BC = c$. AG

$AG = d$, $AB = x$, & $AC = y$. Erit $AD \cdot AG :: AC \cdot AF$, adeoque $AF = \frac{dy}{a}$. Erit & $AB \cdot AC :: PD \cdot CD$, seu $x \cdot y :: b \cdot a - y$. Ergo $by = ax - yx$, quæ æquatio est ad Hyperbolam Rursus per 13. II. *Elem.* erit $BCq = ACq + ABq - 2FAB$, id est $cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}$. Prioris æquationis partes ductas in $\frac{2d}{a}$ aufer de partibus hujus, & restabit $cc - \frac{2bdy}{a} = yy + xx - 2dx$, æquatio ad circulum, ubi x & y ad rectos sunt angulos. Quare si hasce duas lineas Hyperbolam & Circulum ope harum æquationum componas, earum intersectione habebis x & y, seu AB & AC quæ positionem rectæ BC determinant. Componentur autem lineæ illæ ad hunc modum.

Duc rectas duas quasvis KL æqualem AD, & KM æqualem PD continentes angulum rectum MKL. Comple parallelogrammum KLMN, & asymptotis LN, MN per punctum K describe Hyperbolam IKX.

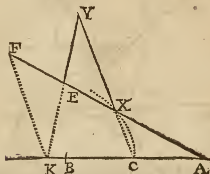
In KM versus K producta cape KP æqualem AG & KQ æqualem BC. Et in KL producta versus K cape KR æqualem AH, & RS æqualem RQ. Comple parallelogrammum PKRT, & centro T intervallo TS describe circulum. Secet hic Hyperbolam in puncto X. Ad KP demitte perpendiculum XY, & erit XY æqualis

A C & K Y æqualis A B. Quæ duæ lineæ A C & A B vel una earum cum puncto P determinant positionem quæsitam rectæ B C. Cui constructioni demonstrandæ, & ejus casibus secundum casus Problematis determinandis non immoror.

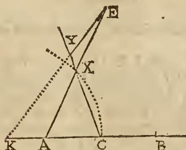
Hac, inquam, constructione solvi potest Problema sicui ita visum sit. Sed hæc solutio magis composita est quam ut usibus ullis inservire possit. Nuda speculatio est, & speculationes Geometricæ tantum habent elegantiæ quantum simplicitatis, tantumque laudis merentur quantum utilitatis secum afferunt. Ea de causa constructionem per Conchoidem præfero ut multo simpliciorem, & non minus Geometricam; & quæ resolutioni æquationum à nobis propositæ optime conducit. Præmisso igitur præcedente Lemmate construimus Geometrice Problemata cubica, & quadrato-quadratica [*utpote quæ ad cubica reduci possunt*] ut sequitur.

Pro-

Proponatur æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, *cujus terminus secundus deest, tertius vero sub signo suo designatur per* $+ q$ *&* *quartus per* $+ r$.



Duc quamlibet KA quam dic n. In KA utrinque producta cape $KB = \frac{q}{n}$ ad easdem partes cum



KA si habeatur $+ q$, aliter ad contrarias. Biseca BA in C, & centro K radio KC fac circulum

 CX,

C X, cui inſcribe rectam C X æqualem $\frac{r}{nn}$, & produc eam utrinque. Dein junge A X & produc eam utrinque. Denique inter has lineas C X & A X inſcribe E Y ejuſdem longitudinis cum C A, quæque producta tranſeat per punctum K, & X Y erit radix æquationis. Et ex his radicibus affirmativæ erunt quæ cadunt ad partes X verſus C, & negativæ quæ cadunt ad partes contrarias, ſi habeatur $+ r$, & contra ſi habeatur $- r$.

Demonſtratio.

Ad demonſtrationem præmittimus Lemmata ſequentia.

L E M. I. *Eſt Y X ad A K ut C X ad K E.* Etenim age KF parallelam CX, & ob ſimilia triangula A C X, A K F, & E Y X, E K F, erit A C ad A K ut C X ad KF, & Y X ad Y E ſeu A C ut K F ad K E, adeoque ex æquo perturbate Y X ad A K ut C X ad K E. Q. E. D.

LEM. II. *Eſt Y X ad A K ut C Y ad A K + K E.* Nam componendo eſt Y X ad A K ut YX + CX, id eſt C Y ad A K + K E. Q. E. D.

L E M.

LEM. III. *Est* $KE - BK$ *ad* YX *ut* YX *ad* AK.

Nam per 12. II. *Elem.* est $YKq - CKq = CYq - CY \times CX = CY \times YX$, hoc est si Theorema resolvatur in proportionem CY ad $YK - CK$ ut $YK + CK$ ad YX. Sed est $YK - CK = YK - YE + CA - CK = KE - BK$. Et $YK + CK = YK - YE + CA + CK = KE + AK$. Adeoque est CY ad $KE - BK$ ut $KE + AK$ ad YX. Sed per *Lemma secundum* erat CY ad $KE + AK$ ut YX ad AK. Ergo ex æquo est YX ad $KE - BK$ ut AK ad YX. Seu $KE - BK$ ad YX ut YX ad AK. Q. E. D.

His præmissis Demonstrabitur Theorema ut sequitur. In *primo Lemmate* erat YX ad AK ut CX ad KE, seu $KE \times YX = AK \times CX$. In *tertio* erat $KE - BK$ ad YX ut YX ad AK. Unde si prioris rationis termini ducantur in YX fiet $KE \times YX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK, id est $AK \times CX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK, & ductis extremis & mediis in se $AKq \times CX - AK \times BK \times YX = YX$ *cub.* Denique pro YX, AK, BK, & CX restitutis x, n, $\frac{q}{n}$, & $\frac{r}{nn}$ orietur $r - qx = x^3$. Q. E. D. Quod vero ad signorum variationes attinet, istis secundum casus Problematum determinandis non immoror.

Proponatur jam æquatio cujus tertius terminus deest $x^3 + pxx + r = 0$. Et ad ejus constructionem assumpto quolibet n, cape in recta aliqua longitudines duas $KA = \frac{r}{nn}$, & $KB = p$, idque ad easdem partes si r & p habeant eadem signa, aliter ad contrarias. Biseca BA in C, & centro K radio KC describe circulum cui inscribe CX æqualem n,

& produc eam utrinque. Item junge AK, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inſcribe EY ejuſdem longitudinis cum CA, ita ut ea ſi producatur tranſeat per K, & KE erit radix æquationis. Radices autem affirmativæ ſunt ubi punctum Y cadit à parte puncti X verſus C, & negativæ ubi punctum Y cadit ad alteras partes puncti X ſi modo habeatur $+r$, & contra ſi habeatur $-r$.

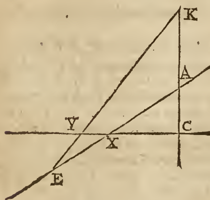
Ad hujus Propoſitionis demonſtrationem Schemata & Lemmata de priori propoſitione mutuo ſumantur, & *Demonſtratio* erit ut ſequitur.

Per *Lemma* 1, erat YX ad AK ut CX ad KE ſeu $YX \times KE = AK \times CX$, & per *Lemma* 3, $KE - KB$ ad YX ut YX ad AK, aut (ſumpto KB ad contrarias partes) $KE + KB$ ad YX ut YX ad AK, adeoque $KE + KB$ in KE ad $YX \times KE$, ſeu $AK \times CX$ ut YX ad AK, ſeu CX ad KE. Quare ductis extremis & mediis in ſe, eſt $KE\ cub. + KB \times KEq = AK \times CXq$, & ipſarum KE, KB, AK, & CX reſtitutis valoribus ſupra aſſignatis, $x^3 + pxx = r$.

Proponimus jam æquationem trium dimenſionum $x^3 + pxx + qx + r = 0$, nullo termino carentem, & cujus tres radices non ſunt omnes affirmativæ neque omnes negativæ.

Et primo ſi terminus q *negativus* eſt, in recta aliqua KB capiantur longitudines duæ $KA = \frac{r}{q}$ & $KB = p$, idque ad eaſdem partes puncti K ſi p & $\frac{r}{q}$ habent ſigna diverſa; aliter ad contrarias. Biſeca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale radici quadraticæ termini q: Et inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inſcribatur recta EY quæ æqualis

æqualis sit rectæ A C, & producta transeat per punctum K, atque K E erit radix æquationis, quæ



quidem affirmativa erit si punctum X cadat inter puncta A & E, negativa vero si punctum E cadat ad partes puncti X versùs A.

Quod si terminus *q affirmativus* est, in recta K B capiantur longitudines illæ duæ $KA = \sqrt{\frac{-r}{p}}$, & $KB = \frac{q}{KA}$, idque ad easdem partes puncti K, si $\sqrt{\frac{-r}{p}}$ & $\frac{q}{KA}$ habent signa diversa; aliter ad contrarias: Biseca A B in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum C X æquale termino p: & inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inscribatur recta E Y quæ æqualis sit rectæ A C, & producta transeat per punctum K, atque X Y erit radix æquationis; quæ quidem negativa erit si punctum x cadat inter puncta A & E, affirma-

affirmativa vero si punctum Y cadat ad partes puncti X versus punctum C.

Demonstratio casus prioris:

Per *Lemma primum* erat KE ad CX ut AK ad YX, & ita (componendo) est KE + AK, id est KY + KC ad CX + YX, id est CY. Sed in triangulo rectangulo KCY est YCq æquale YKq − KCq, id est æquale KY + KC in KY − KC, & resolvendo terminos æquales in proportionales, KY + KC ad CY ut CY ad KY − KC, seu KE + AK ad CY ut CY ad EK − KB. Quare cum in hac proportione fuerit KE ad CX; duplicetur proportio, & erit KEq ad CXq ut KE + AK ad KE − KB; & ductis extremis & mediis in se KE *cub.* − KB × KEq = CXq × KE + CXq × AK. Et restitutis valoribus supra assignatis $x^3 - pxx = qx + r$.

Demonstratio casus secundi.

Per *Lemma primum* est KE ad CX ut AK ad YX, ductisque extremis & mediis in se fit KE × YX = CX × AK. Scribe ergo in superioribus KE × YX pro CX × AK, & fiet KE *cub.* − KB × KEq = CXq × KE + CX × KE × YX. Et applicatis omnibus ad KE erit KEq − KB × KE = CXq + CX × YX: ductisque omnibus in AK habebitur AK × KEq − AK × KB × KE = AK × CXq + AK × CX × YX: Ac rursus scripto KE × YX pro CX × AK, fiet AK × KEq − AK × KB × KE = KE × YX × CX + KE × YXq: & applicatis omnibus ad KE orietur AK × KE − AK × KB = YX × CX + YXq: ductisque omnibus in YX emerget AK × KE × YX − AK × KB × YX = YXq

$= YXq \times CX + YX$ *cub.* & pro $KE \times YX$ scriptis in primo termino $CX \times AK$, fiet $CX \times AKq - AK \times KB \times YX = CX \times YXq + YX$ *cub.* seu quod perinde est YX *cub.* $+ CX \times YXq + AK \times KB \times YX - CX \times AKq = 0$. Atque pro YX, CX, AK & KB substitutis valoribus supra assignatis x, p, $\sqrt{\frac{-r}{p}}$, $q\sqrt{\frac{p}{-r}}$ emerget tandem $x^3 + pxx + qx + r = 0$, æquatio construenda.

Solvuntur etiam hæ æquationes ducendo rectam lineam datæ longitudinis inter circulum & aliam rectam positione datos, ea lege ut recta illa ducta convergat ad punctum datum.

Proponatur enim æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, *cujus terminus secundus deest.*

Duc rectam KA ad arbitrium. Eam dic n. In KA utrinque producta cape $KB = \frac{q}{n}$, idq; ad easdem partes puncti K cum linea KA si modo habeatur $-q$, aliter ad diversas. Biseca BA in C, & centro A intervallo AC describe circulum CX. Ad hunc apta lineam rectam

rectam $CX = \frac{r}{nn}$, & per puncta K, C, & X describe circulum KCXG. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum secet circulum ultimo descriptum KCXG in puncto G. Denique inter hunc ultimo descriptum circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC, ita ut ea convergat ad punctum G. Et acta recta EC erit una ex radicibus æquationis. Radices autem affirmativæ sunt quæ cadunt in majori circuli segmento KGC, & negativæ quæ in minori KFC si habeatur $-r$; & contra si habeatur $+r$ affirmativæ in minori segmento KFC, negativæ in majori KGC reperientur.

Ad hujus vero constructionis demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

Lem. I. *Positis quæ in constructione superiore, est CE ad KA ut CE + CX ad AY, & CX ad KA.*

Nam recta KG ducta, est AC ad AK ut CX ad KG, idque ob similia triangula ACX, AKG. Sunt etiam triangula YEC, YKG similia: quippe quæ communem habent angulum ad Y, & angulos ad G & C in eodem circuli KCG segmento EGCK, atque adeo æquales. Inde fit CE ad EY ut KG ad KY, id est CE ad AC ut KG ad KY eo quod EY & AC juxta Hypothesin æquantur. Collata autem hacce cum superiore proportionalitate colligitur ex æquo perturbate quod sit CE ad KA ut CX ad KY, & vicissim CE ad CX ut KA ad KY. Unde componendo fit CE + CX ad CX ut KA + KY ad KY, id est ut AY ad KY, & vicissim CE + CX ad AY ut CX ad KY hoc est ut CE ad KA. Q. E. D.

Lem. II. *Demisso ad lineam GY perpendiculo CH, fiet rectangulum 2 HEY æquale rectangulo CE × CX.*

Nam

Nam demisso etiam ad lineam AY perpendiculo GL, triangula KGL, ECH rectos habentia angulos ad L & H, & angulos ad K & E in eodem circuli CGK segmento CKEG, adeoque æquales, æquiangula sunt & proinde similia. Est ergo KG ad KL ut EC ad EH. Porro, à puncto A ad lineam KG demisso perpendiculo AM, ob æquales AK, AG bisecabitur KG in M, & triangula KAM KGL ob angulum ad K communem, & angulos ad M & L rectos fient similia: & inde est AK ad KM ut KG ad KL. Sed ut est AK ad KM ita est 2 AK ad 2KM seu KG, & ita (ob similia triangula AKG, ACX) est 2 AC ad CX; & (ob æquales AC & EY) ita est 2 EY ad CX. Ergo est 2 EY ad CX ut KG ad KL. Sed erat KG ad KL ut EC ad EH, ergo est 2 EY ad CX ut EC ad EH, atque adeo rectangulum 2 HEY (ductis nimirum extremis & mediis in se) æquale est rectangulo $EC \times CX$. Q. E. D.

Assumpsimus hic lineas AK, AG æquales esse. Nimirum rectangula CAK, XAG (per *Corol. Prop.* 36. *lib.* III. *Elem.*) æqualia sunt, atque adeo ut CA est ad XA ita AG est ad AK. Sed CA, XA æquales sunt per Hypothesin; ergo & AG, AK.

LEM. III. *Constructis omnibus ut supra, tres lineæ BY, CE, KA, sunt continue proportionales.*

Nam (per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.*) est $CYq = EYq + CEq + 2EY \times EH$. Et ablato utrinque EYq fit $CYq - EYq = CEq + 2EY \times EH$. Sed $2EY \times EH$ (per *Lem.* 2.) æquale est rectangulo $CE \times CX$, & addito utrinque CEq fit $CEq + 2EY \times EH = CEq + CE \times CX$. Ergo $CYq - EYq$ æquale est $CEq + CE \times CX$, id est $CY + EY$ in $CY - EY$ æquale est $CEq + CE \times CX$. Et resolutis æqualibus rectangulis in latera proportionalia fit $CE + CX$ ad $CY + EY$ ut $CY - EY$ ad

ad C E. Sunt autem tres lineæ E Y, C A, C B æquales, & inde $CY + EY = CY + CA = AY$, & $CY - EY = CY - CB = BY$. Scribantur itaque A Y pro $CY + EY$, & B Y pro $CY - EY$, & fiet $CE + CX$ ad A Y ut B Y ad C E. Sed (*per Lem.* 1.) eſt CE ad KA ut $CE + CX$ ad AY, ergo eſt C E ad K A ut B Y ad C E, hoc eſt lineæ tres B Y, C E, K A, ſunt continue proportionales. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum conſtructio ſuperioris Problematis ſic *demonſtratur*.

Per Lemma 1. eſt C E ad K A ut C X ad K Y, adeoque $KA \times CX = KY \times CE$, & applicatis his æqualibus extremorum & mediorum rectangulis ad CE fit $\frac{KA \times CX}{CE} = KY$. His lateribus æqualibus adde B K & æqualia erunt $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ & BY. Unde per *Lemma tertium* eſt $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ ad C E ut C E ad K A, & inde, ductis extremis & mediis in ſe provenit CEq æquale $BK \times KA + \frac{KAq \times CX}{CE}$, & omnibus præterea ductis in C E fit C E *cub.* æquale $BK \times KA \times CE + KAq \times CX$. C E erat radix æquationis dicta x, K A erat n, KB $\frac{q}{n}$, & CX $\frac{r}{nn}$. His pro C E, K A, K B, & C X ſubſtitutis oritur $x^3 = qx + r$, ſeu $x^3 - qx - r = 0$, æquatio conſtruenda; ubi q & r negativa prodeunt ſumptis K A & K B ad eaſdem partes puncti K, & radice affirmativa in majori ſegmento C G K exiſtente. Hic *unus caſus* eſt Conſtructionis demonſtrandæ. Ducatur K B ad partes contrarias, id eſt, mutetur

mutetur signum ejus seu signum ipsius $\frac{q}{n}$, vel quod perinde est, signum termini q, & habebitur constructio æquationis $x^3 + qx - r = 0$: *Qui casus est alter.* In his casibus CX, & radix affirmativa CE cadunt ad easdem partes lineæ AK. Cadant CX & radix negativa ad easdem mutato signo ipsius CX seu $\frac{r}{nn}$ vel (quod perinde est) signo ipsius r, & habebitur *casus tertius* $x^3 + qx + r = 0$, ubi radices omnes sunt negativæ. Et mutato rursus signo ipsius KB seu $\frac{q}{n}$ vel solius q, incidetur in *casum quartum* $x^3 - qx + r = 0$. Quorum omnium casuum constructiones percurrere licebit, & sigillatim demonstrare ad modum casus primi. Nos uno casu demonstrato cæteros leviter attingere satis esse putavimus. Hi verbis iisdem mutato solum linearum situ demonstrantur.

Construenda jam sit æquatio cubica $x^3 + pxx * + r = 0$, *cujus tertius terminus deest.*

In figura superiore assumpta longitudine quavis n, capias in recta quavis infinita AY, KA, & KB quarum KA valeat $\frac{r}{nn}$, & KB valeat p. Has cape ad easdem partis puncti K, si modo signa terminorum p & r sint eadem, secus ad contrarias. Biseca BA in C, & centro K intervallo KC describe circulum CXG. In eo aptes rectam CX, æqualem longitudini assumptæ n. Junge AX & produc junctam ad G ita ut fiat AG æqualis AK, & per puncta K, C, X, G, describe circulum. Denique inter hunc circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC ea lege ut hæc inscripta recta transeat per punctum G si modo ipsa producatur: & acta

acta recta KY erit una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ cadunt ad partes puncti K versus punctum A si modo habeatur $+r$; sin habeatur $-r$, affirmativæ sunt quæ cadunt ad partes contrarias. Et si affirmativæ radices jacent ex una parte puncti A, negativæ sunt quæ jacent ex altera.

Demonstratur autem hæc constructio ope Lemmatum trium novissimorum in hunc modum.

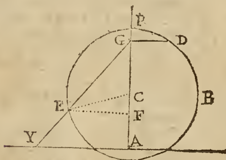
Per *Lemma tertium* sunt BY, CE, KA continue proportionales; & per *Lemma primum* ut est CE ad KA ita est CX ad KY. Ergo BY est ad CE ut CX ad KY. BY idem est quod $KY - KB$. Ergo $KY - KB$ est ad CE ut CX ad KY. Sed ut est $KY - KB$ ad CE ita est $KY - KB$ in KY ad CE in KY, idque per *Prop.* 1. *lib.* VI. *Elem.* & ob proportionales CE ad KA ut CX ad KY est CE in KY æquale KA in CX. Ergo $KY - KB$ in KY est ad KA in CX (ut $KY - KB$ ad CE, hoc est) ut CX ad KY. Et ductis extremis & mediis in se invicem fit $KY - KB$ in KY*q* æquale KA in CX*q*: id est KY *cub.* $-$ KB $\times$ KY *quad.* æquale KA $\times$ CX *quad.* Erat autem in constructione, KY radix æquationis dicta x, KB æqualis p, KA æqualis $\frac{r}{nn}$, & CX æqualis n. Scribantur igitur x, p, $\frac{r}{nn}$, & n pro KY, KB, KA, & CX respective, & fiet $x^3 - pxx = r$, seu $x^3 - pxx - r = 0$.

Resolvi potest constructio demonstranda in hasce quatuor æquationum casus, $x^3 - pxx - r = 0$, $x^3 - pxx + r = 0$, $x^3 + pxx - r = 0$, & $x^3 + pxx + r = 0$. Casum primum jam demonstratum dedi, cæteri tres iisdem verbis mutato tantum linearum situ demonstrantur. Nimirum uti sumendo

do KA & KB ad easdem partes puncti K, & radicem affirmativam KY ad contrarias partes, jam prodiit KY *cub.* $-$ KB $\times$ KYq = KA $\times$ CXq, & inde $x^3 - pxx - r = 0$: sic sumendo KB ad contrarias partes puncti K, prodibit simili argumentationis progressu KY *cub.* $+$ KB $\times$ KYq = KA $\times$ CXq, & inde $x^3 + pxx - r = 0$. Et in hisce duobus casibus si mutetur situs radicis affirmativæ KY sumendo eam ad alteram partem puncti K, per similem argumentationis seriem devenietur ad alteros duos casus KY *cub.* $+$ KB $\times$ KYq = $-$ KA $\times$ CXq, seu $x^3 + pxx + r = 0$, & KY *cub.* $-$ KB $\times$ KYq = $-$ KA $\times$ CXq, seu $x^3 - pxx + r = 0$. Qui omnes casus erant demonstrandi.

Proponatur jam æquatio cubica $x^3 + pxx + qx + r = 0$, *nullo (nisi forte tertio) termino carens.* Ea construetur ad hunc modum.

Cape ad arbitrium longitudinem n. Ejus dimidio æqualem duc rectam quamvis GC, & ad punctum G erige perpendiculum GD æquale $\sqrt{\frac{r}{p}}$.



Deinde si termini p & r habent contraria signa, centro C intervallo CD describe circulum PBE.

Sin eadem sunt eorum signa, centro D intervallo GC describe circulum occultum secantem rectam GA in H; dein centro C intervallo GH describe circulum PBE. Tum fac $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, eamque duc in linea GC ad partes puncti G versus C si modo quantitas $-\frac{q}{n}$ $-\frac{r}{np}$ (signis terminorum p, q, r, in æquatione construenda probe observatis) affirmativa obvenerit: secus age GA ad alteras partes puncti G, & ad punctum A erecto perpendiculo AY, inter hoc & circulum PBE superius descriptum inscribe lineam EY æqualem termino p, ea lege ut hæc inscripta convergat ad punctum G. Quo facto & producta illa EY ad G, erit linea EG una ex radicibus æquationis construendæ. Quæ quidem radices affirmativæ sunt ubi punctum E cadit inter puncta G & Y, & negativæ ubi E cadit extra, si modo habeatur $+p$; & contra si $-p$.

Demonstrationi hujus constructionis præmittimus *Lemmata* sequentia.

LEM. I. *Demisso ad AG perpendiculo EF & acta recta EC, est* $EGq + GCq = ECq + 2\,CGF$.

Nam per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.* est $EGq = ECq + GCq + 2\,GCF$. Addatur utrinque GCq & fiet $EGq + GCq = ECq + 2GCq + 2GCF$. Sed $2GCq + 2GCF$ est $2GC$ in $GC + CF$ id est $2CGF$. Ergo $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Q.E.D.

LEM.

LEM. II. *In constructionis casu primo ubi circulus PBE transit per punctum D, est* $EGq - GDq = 2CGF$.

Nam per *Lemma primum* est $EGq + GCq = ECq + 2CGF$, & ablato utrinque GCq, fit $EGq = ECq - GCq + 2CGF$. Sed $ECq - GCq$ idem est quod $CDq - GCq$, hoc est idem quod GDq. Ergo $EGq = GDq + 2CGF$; & subducto utrobique GDq, fit $EGq - GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEM. III. *In constructionis casu secundo, ubi circulus PBE non transit per punctum D, est* $EGq + GDq = 2CGF$.

Namque in *Lemmate primo* erat $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Aufer utrinque ECq & fiet $EGq + GCq - ECq = 2CGF$. Sed $GC = DH$ & $EC = CP = GH$: ergo $GCq - ECq = DHq - GHq = GDq$, atque adeò $EGq + GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEM. IV. *Est* $2CGF$ *in* $GY = 2CG$ *in* AGE.

Namque ob similia triangula GEF, GYA est GF ad GE ut AG ad GY; hoc est (per *Prop.* I. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2CG \times AG$ ad $2CG \times GY$. Ducantur extrema & media in se, & fiet $2CG \times GY \times GF = 2CG \times AG \times GE$. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum constructio Problematis sic demonstratur.

In casu *primo* est (per *Lem.* 2.) $EGq - GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY - GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc est per *Lem.* 4.) $= 2CG \times AGE$. Pro GY scribe $EG + EY$, & fiet $EG\,cub. + EY \times EGq - GDq \times EG - GDq \times EY = 2CGA \times EG$, seu $EG\,cub. + EY \times EGq \begin{matrix} - GDq \\ - 2CGA \end{matrix} \times EG - GDq \times EY = 0$.

In casu *secundo* est (per *Lem.* 3.) $EGq + GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY + GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc est per *Lem.* 4.) $= 2CG$

$= 2CG \times AGE$. Pro GY scribe $EG + EY$, & fiet $EG\,cub. + EY \times EGq + GDq \times EG + GDq \times EY = 2CGA \times EG$, seu $EG\,cub. + EY \times EGq \begin{matrix} + GDq \\ -2CGA \end{matrix} \times EG + GDq \times EY = 0$.

Jam vero erat EG radix æquationis constructæ dicta x; item $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2CG = n$, & $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, id est in casu primo ubi terminorum p & r diversa sunt signa: at in casu secundo ubi alterutrius p vel r mutatur signum fiet $-\frac{q}{n} + \frac{r}{np} = GA$. Scribantur igitur pro EG, GD, EY, 2CG, & GA quantitates x, $\sqrt{\frac{r}{p}}$, p, n, & $-\frac{q}{n} \mp \frac{r}{np}$, & casu *primo* fiet $x^3 + px^2 \begin{matrix} -\frac{r}{p} \\ +q+\frac{r}{p} \end{matrix} x - r = 0$, id est $x^3 + pxx + qx - r = 0$, casu autem *secundo* $x^3 + px^2 \begin{matrix} +\frac{r}{p} \\ +q-\frac{r}{p} \end{matrix} x + r = 0$, id est $x^3 + pxx + qx + r = 0$. Est igitur in utroque casu EG vera longitudo radicis x. Q. E. D.

Subdistinguitur autem casus uterque in casus plures particulares: Nimirum prior in hosce $x^3 + px^2 + qx - r = 0$, $x^3 + pxx - qx - r = 0$, $x^3 - pxx + qx + r = 0$, $x^3 - pxx - qx + r = 0$, $x^3 + px^2 - r = 0$, & $x^3 - pxx + r = 0$; posterior in hosce $x^3 + pxx + qx + r = 0$, $x^3 + pxx - qx + r = 0$, $x^3 - pxx + qx - r = 0$, $x^3 - pxx - qx - r = 0$, $x^3 + pxx + r = 0$, & $x^3 - pxx - r = 0$. Quorum omnium demonstrationes verbis iisdem ac duorum jam demonstratorum, mutato tantum linearum situ, compinguntur.

Hæ

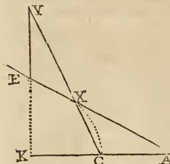
Hæ sunt Problematum constructiones præcipuæ per inscriptionem rectæ longitudine datæ inter circulum, & rectam lineam positione datam ea lege ut inscripta ad datum punctum convergat. Inscribitur autem talis recta ducendo *Conchoidem* veterum, cujus Polus sit punctum illud ad quod recta inscribenda debet convergere, Regula seu Asymptotos recta altera positione data, & intervallum longitudo rectæ inscribendæ. Secabit enim hæc Conchoides circulum præfatum in puncto E per quod recta inscribenda duci debet. Suffecerit vero in rebus practicis rectam illam inter circulum & alteram positione datam rectam ratione quacunque mechanica interponere.

In hisce autem constructionibus notandum est quod quantias n, ubique indeterminata & ad arbitrium assumenda relinquitur, id adeo ut singulis problematis constructiones commodius aptentur. Hujus rei exempla in inventione duarum medie proportionalium, & anguli trisectione dabimus.

Inveniendæ sint inter a *&* b *duæ medie proportionales* x *&* y. Quoniam sunt $a.x.y.b$ continue proportionales erit aa ad xx ut x ad b, adeoque $x^3 = aab$, seu $x^3 - aab = 0$. Hic desunt æquationis termini p & q, & loco termini r habetur $-aab$. Igitur in constructionum formula prima, ubi recta EY ad datum punctum K convergens inseritur inter alias duas positione datas rectas EX & YC, & recta CX ponitur æqualis $\frac{r}{nn}$ id est æqualis $\frac{-aab}{nn}$, assumo n æqualem a, & sic fit CX æqualis $-b$. Unde talis emergit constructio.

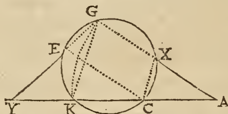
Duco quamvis KA æqualem a, eamque biseco in C, centroque K intervallo KC describo cir-

culum CX ad quem apto rectam CX æqualem b & inter rectas AX, CX infinite productas pono EY æqualem CA, & convergentem ad punctum K. Sic erunt KA, XY, KE, CX, continue proportionales, id est XY & KE duæ mediæ proportionales inter a & b. Constructio nota est.



In altera autem constructionum formula ubi recta EY ad datum punctum G convergens ponitur inter circulum GECX & rectam AK, estque $CX = \frac{r}{nn}$ id est (in hoc Problemate) $= \frac{-aab}{nn}$, pono ut prius $n = a$, & sic fit $CX = b$, cæteraque peraguntur ut sequitur.

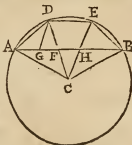
Duco rectam quamvis KA æqualem a, eamque biseco in C & centro A intervallo AK describo



circulum KG ad quem apto rectam KG æqualem $2b$ constituendo triangulum æquicrurum AKG. Dein per puncta C, K, G circulum describo & inter hujus perimetrum & rectam productam AK inscribo rectam EY æqualem KC, & convergentem ad

ad punctum G. Quo facto continue proportionales erunt AK, EC, KY, $\frac{1}{2}$KG, id est EC & KY duæ mediæ proportionales erunt inter datas a & b.

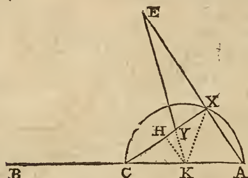
Secandus jam sit angulus in partes tres æquales. Sitque angulus secandus ACB, partes ejus inveniendæ ACD, DCE, ECB.



Centro C intervallo CA describatur circulus ADEB secans rectas CA, CD, CE, CB in A, D, E, B. Jungantur AD, DE, EB ut & AB secans rectas CD, CE in F & H, & ipsi CE parallela agatur DG occurrens AB in G. Ob similia triangula CAD, ADF, DFG, continue proportionales sunt CA, AD, DF, FG. Ergo si dicatur $AC = a$, & $AD = x$, fiet $DF = \frac{xx}{a}$, & $FG = \frac{x^3}{aa}$. Est autem $AB = BH + HG + FA - GF = 3AD - GF = 3x - \frac{x^3}{aa}$. Dic $AB = b$, & fiet $b = 3x - \frac{x^3}{aa}$, seu $x^3 - 3aax + aab = 0$. Hic deest æquationis terminus secundus p, & loco q & r habentur $-3aa$ & aab. Ergo in constructionum formula prima ubi erat $p = 0$, $KA = n$, $KB = \frac{q}{n}$, & $CX = \frac{r}{nn}$, id est in problemate jam construendo $KB = -\frac{3aa}{n}$, & $CX = \frac{aab}{nn}$, ut hæ quantitates evadant quam simplicissimæ pono $n = a$, & sic fit $KB = -3a$, & $CX = b$.

= b. Unde talis emergit Problematis *constructio*.

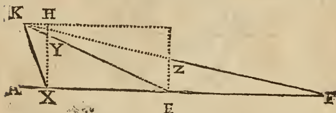
Ago quamvis K A = a, & ad contrarias partes K B = $3a$. Biſeco B A in C, centroque K intervallo K C deſcribo circulum, cui inſcribo rectam



C X = b. Et acta recta AX, inter ipſam infinite productam & rectam C X pono rectam E Y æqualem AC, & convergentem ad punctum K. Sic fit X Y = x. Quinetiam ob æquales circulos ADEB, CXA, & æquales ſubtenſas AB, CX, nec non æquales ſubtenſarum partes BH, XY, æquales erunt anguli ACB, CKX, ut & anguli BCH, XKY, atque adeo anguli C K X tertia pars erit angulus XKY. Dati igitur cujuſvis anguli CKX pars tertia XKY invenietur ponendo inter chordas CX, A X infinite productas rectam EY æqualem diametro A C, & convergentem ad circuli centrum K.

Hinc ſi à circuli centro K ad ſubtenſam C X demittas perpendiculum K H, erit angulus H K Y tertia pars anguli HKX, adeo ut ſi detur quilibet angulus HKX inveniri poſſit ejus pars tertia HKY demittendo à quolibet lateris utriuſvis K X puncto

cto X ad latus alterum KH perpendiculum XH, & lateri KH ducendo parallelam X E, dein rectam YE duplam ipsius KX, & convergentem ad punctum K ponendo inter rectas XH & XE. *Vel sic.* Detur angulus quilibet AXK. Ad latus alterutrum

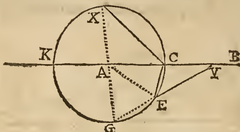


A X erigatur perpendiculum XH, & à lateris alterius XK puncto quovis K agatur recta KE cujus pars YE interjacens lateri AX producto, & ejus perpendiculo XH sit dupla lateris XK, & erit angulus KEA tertia pars anguli dati AXK. Tum rursus erecto perpendiculo EZ, & acta K F cujus pars ZF inter EF & EZ sit dupla ipsius KE, fiet angulus KFA tertia pars anguli KEA, & sic pergitur per continuam anguli trisectionem in infinitum. Exstat autem hæc trisectio apud *Pappum, lib.* 4 *Prop.* 32.

Quod si angulum per alteram constructionum formulam ubi recta inter aliam rectam & circulum ponenda est, trifariam dividere malueris: Hic etiam erunt $KB = \frac{q}{n}$, & $CX = \frac{r}{nn}$, id est in problemate de quo nunc agimus $KB = \frac{-3aa}{n}$, & $CX = \frac{aab}{nn}$, adeoque ponendo $n = a$ fiet $KB = -3a$, & $CX = b$. Et inde talis emerget *constructio.*

A puncto quovis K ducantur ad easdem partes rectæ duæ $KA = a$, & $KB = 3a$. Biseca AB in C, cen-

C, centroque A intervallo AC deſcribe circulum. In eo pone rectam CX = b. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum ſecet circulum jam



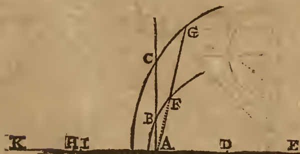
deſcriptum in G. Tum inter hunc circulum & rectam KC infinite productam pone rectam EY æqualem rectæ AC, & convergentem ad punctum G, & acta recta EC erit longitudo quæſita x, qua tertia pars anguli dati ſubtenditur.

Talis conſtructio conſequitur formulam ſuperius allatam: quæ tamen ſic evadet concinnior. Ob æquales circulos ADEB & KXG, & æquales ſubtenſas CX & AB, æquales ſunt anguli CAX ſive KAG & ACB, adeoque CE ſubtenſa eſt tertiæ partis anguli KAG. Quare dato quovis angulo KAG, ut ejus inveniatur pars tertia CAE, pone inter circulum KGC, & anguli latus KA infinite productum rectam EY æqualem circuli ſemidiametro AG, & convergentem ad punctum G. Sic docuit *Archimedes* angulum trifariam ſecare. Eædem conſtructiones facilius explicari poſſint quam hic factum eſt; ſed in his volui oſtendere quomodo ex generalibus Problematum conſtructionibus ſuperius expoſitis conſtructiones ſimpliciſſimas particularium Problematum derivare liceat.

Lemma Archim 8.

Præter

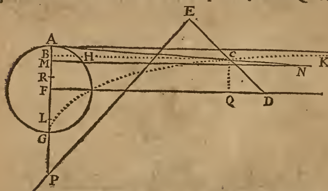
Præter constructiones hic expositas adjungere liceret quamplurimas. *Ut si inter a & b invenienda essent duæ mediæ proportionales.* Age quamvis



AK = *b*, & huic perpendiculare AB = *a*. Bisecæ AK in I, & in eadem AK, subtensæ BI æqualem pone AH; ut & in linea AB producta subtensæ BH æqualem AC. Tum in linea AK ad alteras partes puncti A cape AD cujusvis longitudinis & huic æqualem DE, centrisque D & E, intervallis DB, EC describe circulos duos BF, CG, & inter eos pone rectam FG æqualem rectæ AI, & convergentem ad punctum A, & erit AF, prima duarum mediæ proportionalium quas invenire oportuit.

Docuerunt Veteres inventionem duarum mediæ proportionalium per *Cissoidem*; sed lineæ hujus descriptionem commodam manualem nemo, quod scio, apposuit. Sit AG diameter & F centrum circuli ad quem *Cissois* pertinet. Ad punctum F erigatur normalis FD, eaque producatur in infinitum. Et producatur FG ad P, ut FP æqualis sit circuli Diametro. Moveatur norma rectangula PED ea lege ut crus ejus EP perpetuo transeat per punctum P, & crus alterum ED circuli Diametro AG seu FP æquale, termino suo D tangat semper lineam FD,

& cruris hujus medium punctum C describet *Cissoidem* desideratam G C K ut supra exposui. Quare



si inter duas quasvis a & b inveniendæ sint duæ mediæ proportionales: Cape $A M = a$, erige perpendiculum $M N = b$. Junge A N; & lege præfata moveatur norma P E D, usque dum punctum ejus C incidat in rectam A N. Tum demisso ad A P perpendiculo C B, cape t ad B H, & u ad B G, ut est M N ad B C, & ob continue proportionales A B, B H, B G, B C erunt etiam continue ptoportionales a, t, v, b.

Simili normæ applicatione construi possunt etiam alia Problemata solida. Verbi gratia proponatur æquatio cubica $x^3 \pm p x x + q x - r = 0$: ubi q semper affirmativum sit, r negativum, & p signi utriusvis. Fac $A G = \frac{r}{q}$, eamque biseca in F, & cape F R & $G L = \frac{1}{2} p$, idque versus A si habeatur $+ p$ aliter versus P. Erige insuper normalem F D, inque ea cape $F Q = \sqrt{q}$ huic etiam erige normalem Q C. In normæ autem crure E D, cape E D & E C ipsis A G & A R æquales respective, & applicetur deinceps norma ad Schema sic ut punctum ejus D tangat rectam F D, & punctum C rectam Q C, tum si compleatur parallelogrammum B Q; erit L B æquationis radix quæsita x.

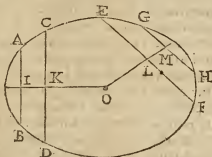
Hactenus

Hactenus constructionem solidorum Problematum per operationes quarum praxis manualis maxme simplex est & expedita exponere visum fuit. Sic Veteres postquam confectionem horum problematum per compositionem locorum solidorum assecuti fuerant, sentientes ejusmodi constructiones ob difficilem Conicarum sectionum descriptionem inutiles esse, quærebant constructiones faciliores per Conchoidem, Cissoidem, extensionem filorum & figurarum adaptiones quascunque mechanicas: prælata mechanica utilitate inutili speculationi Geometricæ, ut ex *Pappo* discimus, Sic magnus ille *Archimedes* trisectionem anguli per coni sectiones à superioribus Geometris expositam neglexit, & in Lemmatis suis angulum modo à nobis superius exposito trifariam secare docuit. Si veteres problemata per figuras ea tempestate in Geometriam non receptas construere maluerint, quanto magis præferendæ nunc sunt illæ figuræ, in Geometriam æque ac ipsæ coni sectiones à plerisque receptæ.

Verum tamen novo huic Geometrarum generi haud assentior, qui figuras hasce omnes in Geometriam recipiunt, Eorum regula admittendi lineas omnes ad constructionem Problematum eo ordine quo æquationes quibus lineæ illæ definiuntur, numero dimensionum ascendunt, arbitraria est, & in Geometria fundamentum non habet. Imo falsa est, propterea quod circulus hac lege cum Coni sectionibus conjungendus esset quem tamen Geometræ omnes cum linea recta conjungunt. Vacillante autem hac regula tollitur fundamentum admittendi certo ordine lineas omnes Analyticas in Geometriam. In Geometriam planam meo quidem judicio lineæ nullæ præter rectam & circulum admitti debent, nisi forte linearum

rum diſtinctio aliqua prius excogitetur qua linea circularis conjungatur cum recta, & à reliquis omnibus ſegregetur. Quinimo ne tum quidem augenda eſt Geometria plana numero linearum, Nam figuræ omnes ſunt planæ quæ admittuntur in Geometriam planam, id eſt quas Geometræ poſtulent in plano deſcribere; Et problema omne planum eſt quod per figuras planas conſtrui poteſt. Sic igitur admiſſis in Geometriam planam conicis ſectionibus, aliiſque magis compoſitis figuris, problemata omnia ſolida & plus quam ſolida quæ per has figuras conſtrui poſſunt evadent plana. Sunt autem problemata omnia plana ejuſdem ordinis. Linea recta Analytice ſimplicior eſt quam circulus; hoc non obſtante problemata ejuſdem ſunt ordinis quæ per rectas ſolas, & quæ per circulos conſtruuntur. Solis poſtulatis reducitur circulus ad eundem ordinem cum recta. Et multo magis Ellipſis quæ minus differt à circulo quam circulus à recta, poſtulando conſimiliter deſcriptionem ejus in plano, reduceretur ad eundem ordinem cum circulo. Siquis ſpeculando Ellipſin incideret in problema aliquod ſolidum, et ipſum beneficio ejuſdem Ellipſeos & circuli conſtrueret: hoc problema jam pro plano habendum eſſet, eo, quod Ellipſis jam ante in plano deſcripta haberi ſupponitur, & conſtructio omnis quæ ſupereſt abſolvitur per circuli ſolius deſcriptionem. Eadem de cauſa problemata quævis plana per datam Ellipſin conſtruere licitum eſt. Verbi gratia ſi datæ Ellipſeos ADFG requireretur centrum O, ducerem parallelas duas AB, CD Ellipſi occurrentes in A, B, C, D, aliaſque duas EF, GH Ellipſi occurrentes in E, F, G, H. Has biſecarem in I, K, L, M, & junctas IK, LM producerem uſque ad concurſum ſuum in O. Legitima eſt hæc conſtructio plani pro-

problematis per Ellipsin. Nil refert quod Ellipsis Analytice definiatur per æquationem duarum dimensionum. Nil quod Ellipsis Geometrice gene-



retur sectione figuræ solidæ. Hypothesis sola, quod Ellipsis jam descripta habetur in plano, problemata omnia solida per ipsam constructa reducit ad ordinem planorum, efficitque ut plana omnia per ipsam legitime construantur. Et eadem est ratio Postulati. Quod vi postulatorum fieri potest, ut jam factum, & datum assumere concessum est. Postuletur igitur Ellipsin in plano describere, & ad ordinem planorum problematum reducentur ea omnia quæ per Ellipsin construi possunt, planaque omnia per Ellipsin licebit construere.

Necesse est igitur aut Problemata plana & solida inter se confundi, aut lineas omnes rejici è Geometria plana præter rectam & circulum, & siqua forsan alia detur aliquando in statu construendi alicujus Problematis. Verum genera problematum confundi nemo certe permiserit. Rejiciantur igitur è Geometria plana sectiones Conicæ, aliæque figuræ omnes præter rectam & circulum, & quas contigerit in statu problematum dari. Alienæ sunt igitur à Geometria descriptiones illæ omnes conicarum sectionum in plano quibus hodierni Geometræ tantopere

topere indulgent. Nec tamen ideo Coni ſectiones è Geometria rejiciendæ erunt. Hæ in plano non deſcribuntur Geometrice, generantur vero in ſolidi Geometrici ſuperficie plana. Conus conſtituitur Geometrice, & plano Geometrico ſecatur. Tale Coni ſegmentum figura Geometrica eſt, eundemque habet locum in Geometria ſolida ac ſegmentum circuli in plana, & hac ratione baſis ejus, quam Coni ſectionem vocant, figura Geometrica eſt. Locum igitur habet Coni ſectio in Geometria quatenus ea ſuperficies eſt ſolidi Geometrici. Alia autem nulla ratione Geometrica quam ſolidi ſectione generatur, & ideo non niſi in Geometriam ſolidam antiquitus admiſſa fuit. Talis autem Conicarum ſectionum generatio difficilis eſt, & in rebus practicis, quibus Geometria potiſſimum inſervire debet, prorſus inutilis. Ideo veteres ſe ad varias figurarum in plano deſcriptiones mechanicas receperunt, & nos ad eorum exemplar conſtructiones præcedentes concinnavimus. Sunto conſtructiones illæ Mechanicæ: ſic & conſtructiones per Coni ſectiones in plano (ut jam moris eſt) deſcriptas Mechanicæ ſunt. Sunto conſtructiones per datas Coni ſectiones Geometricæ: ſic & conſtructiones per alias quaſcunque figuras datas Geometricæ ſunt, & ejuſdem ordinis cum conſtructionibus planorum Problematum. Nulla ratione præferendæ ſunt in Geometria Sectiones conicæ figuris aliis, niſi quatenus illæ à ſectione Coni, praxi ad ſolutionem problematum prorſus inutili, derivantur. Verum tamen ne conſtructiones per Conicas ſectiones omnino prætercam, viſum fuit aliqua de his ſubjungere, in quibus etiam praxi manuali non incommodæ conſulatur.

Conicarum ſectionum ſimpliciſſima eſt Ellipſis. Hæc notior eſt, & circulo magis affinis, & praxi manuali

manuali facilius describitur in plano. Parabolam præferunt plerique ob simplicitatem æquationis per quam ea exprimitur. Verum hac ratione Parabola ipso etiam circulo præferenda esset, contra quam fit. Falsa est igitur argumentatio à simplicitate æquationum. Æquationum speculationi nimium indulgent hodierni Geometræ. Harum simplicitas est considerationis Analyticæ. Nos in compositione versamur, & compositioni leges dandæ non sunt ex Analysi. Manuducit Analysis ad Compositionem: sed Compositio non prius vere confit quam liberatur ab omni Analysi. Insit compositioni vel minimum Analyseos, & compositionem veram nondum assecutus es. Compositio in se perfecta est & à mixtura speculationum Analyticarum abhorret. Pendet Figurarum simplicitas à simplicitate geneseos & Idearum, & æquatio non est sed descriptio (sive Geometrica sive Mechanica) qua figura generatur & redditur conceptu facilis. Ellipsi igitur primum locum tribuentes, docebimus jam quomodo æquationes per ipsam construere licet.

Proponatur æquatio quævis cubica $x^3 = pxx + qx + r$, *ubi* p, q *&* r *datas terminorum æquationis coefficientes cum signis suis* $+$ & $-$ *significant, & alteruter terminorum* p *&* q, *vel etiam uterque deesse potest.* Sic enim æquationum omnium cubicarum constructiones una illa operatione quæ sequitur exhibebimus.

A puncto B in recta quavis data cape duas quascunque rectas BC, BE ad easdem partes; ut & inter ipsas mediam proportionalem BD. Et BC dicta n, cape etiam in eadem recta $BA = -\frac{q}{n}$, idque versus punctum C si habeatur $-q$, aliter ad partes

X con-

contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem p, FG æqualem AF, FI æqualem $\frac{r}{nn}$, & FH in ratione ad FI ut est BC ad BE. FH vero & FI capiendæ sunt ad partes puncti F versus G si termini p & r habent eadem signa, aliter ad partes versus A. Compleantur parallelogramma IACK & HAEL, centroque K, & intervallo KG describatur circulus. Tum in linea HL capiatur ad utramvis partem puncti H longitudo HR, quæ sit ad HL ut BD ad BE: Agatur GR secans EL in S, & moveatur linea GRS puncto ejus R super linea HL, & puncto S super linea EL incedente, donec tertium ejus punctum G describendo Ellipsin, occurrat circulo

circulo, quemadmodum videre est in positione $\gamma\rho\sigma$. Nam dimidium perpendiculi γX ab occursus illius puncto γ in rectam AE demissi erit radix æquationis. Potest autem Regulæ GRS vel $\gamma\rho\sigma$ terminus G vel γ, circulo in tot punctis occurrere quot sunt possibiles radices Et è radicibus hæ sunt affirmativæ quæ cadunt ad eas partes rectæ AE ad quas recta FI ducitur à puncto F, & illæ negativæ quæ cadunt ad contrarias partes lineæ AE, si modo habeatur $+r$: & contra si habeatur $-r$.

Demonstratur autem hæc constructio subsidio *Lemmatum* sequentium.

LEM. I. *Positis quæ in superiore constructione, est* $2CAX - AXq = \gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$.

Namque ex natura circuli est $K\gamma q - CXq$, æquale quadrato ex $\gamma X - AI$. Sed est $K\gamma q$ æquale $GIq + ACq$, & CXq æquale quadrato ex $AX - AC$ hoc est æquale $AXq - 2CAX + ACq$, atque adeo horum differentia $GIq + 2CAX - AXq$, æquatur quadrato ex $\gamma X - AI$, id est ipsi $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq$. Auferatur utrinque GIq, & manebunt æqualia $2CAX - AXq$, & $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq - GIq$. Verum AIq (per *Prop.* 4. *lib.* II. *Elem.*) æquale est $AGq + 2AGI + GIq$, atque adeo $AIq - GIq$ æquale est $AGq + 2AGI$, hoc est æquale $2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GI$, seu æquale $2AG \times FI$, & proinde $2CAX - AXq$, æquale est $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$. Q. E. D.

LEM. II. *Positis quæ in superiore constructione, est* $2EAX - AXq$ *æquale* $\frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$.

X 2 Notum

Notum eſt enim quod punctum γ motu regulæ $\gamma\varrho\sigma$ ſuperius aſſignato deſcribit Ellipſin cujus centrum eſt L, & axes duo cum rectis LE & LH coincidunt, quorum qui in LE æquatur $2\gamma\varrho$ ſive 2 GR, & alter in LH æquatur $2\gamma\sigma$ ſive 2GS. Et horum ratio ad invicem ea eſt quæ lineæ HR ad lineam HL, ſive lineæ BD ad lineam BE. Unde latus tranſverſum eſt ad latus rectum principale ut BE ad BC ſive ut FI ad FH. Quare cum γT ordinatim applicetur ad HL, erit ex natura Ellipſeos $GSq - LTq$ æquale $\frac{FI}{FH} T\gamma q$. Eſt autem LT æquale AE − AX, & $T\gamma$ æquale $X\gamma - AH$. Scribantur horum quadrata pro LTq & $T\gamma q$, & fiet $GSq - AEq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Eſt autem $GSq - AEq$ æquale quadrato ex GH + LS, propterea quod GS hypotenuſa eſt trianguli rectanguli cujus latera ſunt ipſis AE & GH + LS æqualia. Eſt & (ob ſimilia triangula RGH, RSL) LS ad GH ut LR ad HR, & componendo GH + LS ad GH ut HL ad HR, & duplicando rationes, quadratum ex GH + LS, eſt ad GHq ut HLq ad HRq, hoc eſt (per conſtructionem) ut BEq ad BDq, id eſt ut BE ad BC, ſeu FI ad FH, adeoque quadratum ex GH + LS æquale eſt $\frac{FI}{FH} GHq$. Eſt itaque $GSq - AEq$ æquale $\frac{FI}{FH} GHq$, atque adeo $\frac{FI}{FH} GHq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Auferatur utrinque $\frac{FI}{FH} GHq$, & reſtabit $2EAX$

$- AXq$

$-AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq - GHq$. Est autem $AH = AG + GH$, adeoque $AHq = AGq + 2AGH + GHq$ & subducto utrinque GHq restat $AHq - GHq = AGq + 2AGH$, hoc est $= 2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GH$, seu $= 2AG \times FH$, atque adeo est $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + 2AG \times FH$, i.e. $= \frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$. Q.E.D.

LEM. III. *Iisdem positis est AX ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad $2BC$.*

Nam si de æqualibus in *Lemmate secundo* subducantur æqualia in *Lemmate primo*, restabunt æqualia $2CE \times AX$ & $\frac{HI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AI \times X\gamma$. Ducatur pars utraque in FH, & fiet $2FH \times CE \times AX$ æquale $HI \times X\gamma q - 2FI \times AH \times X\gamma + 2AI \times FH \times X\gamma$. Est autem $AI = AH + HI$, adeoque $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2FI \times AH - 2FHA - 2FHI$. Sed $2FI \times AH - 2FHA = 2AHI$, & $2AHI - 2FHI = 2HI \times AF$. Ergo $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2HI \times AF$, adeoque $2FH \times CE \times AX = HI \times X\gamma q - 2HI \times AF \times X\gamma$. Et inde HI ad FH ut $2CE \times AX$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$. Sed per constructionem HI est ad FH ut CE ad BC, atque adeo ut $2CE \times AX$ ad $2BC \times AX$, & proinde $2BC \times AX$ & $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$ (per *Prop. 9. lib.* V. *Elem.*) erunt æqualia. Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera, AX ad $X\gamma - 2AF$, id est ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad $2BC$. Q.E.D.

LEM.

LEM. IV. *Iisdem positis, est* $2FI$ *ad* $AX - 2AB$ *ut* $X\gamma$ *ad* $2BC$.

Nam de æqualibus in Lemmate tertio, nimirum $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, subducantur æqualia in *Lemmate primo*, & restabunt æqualia $-2AB \times AX + AXq = 2FI \times X\gamma - 2AG \times FI$, hoc est AX in $AX - 2AB = 2FI$ in $X\gamma - AG$. Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera $2FI$ ad $AX - 2AB$ ut AX ad $X\gamma - AG$, hoc est (per *Lemma tertium*) ut $X\gamma$ ad $2BC$. Q.E.D.

Præstratis his Lemmatibus, Constructio Problematis sic tandem demonstratur.

Per *Lemma quartum* est $X\gamma$ ad $2BC$ ut $2FI$ ad $AX - 2AB$, hoc est (per *Prop: 1. lib.* VI. *Elem.*) ut $2BC \times 2FI$ ad $2BC \times \overline{AX - 2AB}$, seu ad $2BC \times AX - 2BC \times 2AB$. Sed per *Lemma tertium* est AX ad $X\gamma - 2AF$ ut $X\gamma$ ad $2BC$, seu $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, adeoque $X\gamma$ est ad $2BC$ ut $2BC \times 2FI$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma - 2BC \times 2AB$. Et ductis extremis & mediis in se, fit $X\gamma cub. - 2AF \times X\gamma q - 4BC \times AB \times X\gamma = 8BCq \times FI$. Addantur utrinque $2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma$, & fiet $X\gamma cub. = 2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma + 8BCq \times FI$. Erat autem in constructione demonstranda, $\frac{1}{2} X\gamma$ radix æquationis dicta x, nec non $AF = p$, $BC = n$, $AB = \frac{q}{n}$, & $FI = \frac{r}{nn}$, adeoque $BC \times AB = q$. Et $BCq \times FI = r$. Quibus substitutis fiet $x^3 = px^2 + qx + r$. Q. E. D.

Corol.

Corol. Hinc si AF & AB ponantur nulla, per *Lemma* tertium & quartum fiet 2 FI ad AX ut AX ad $X\gamma$ & $X\gamma$ ad 2 BC. Unde constat inventio duarum medie proportionalium inter datas quaslibet FI & BC.

Scholium. Hactenus æquationis cubicæ constructionem per Ellipsin solummodo exposui: sed regula sua natura generalior est, sese ad omnes coni sectiones indifferenter extendens. Nam si loco Ellipseos velis Hyperbolam adhiberi, cape lineas BC, BE ad contrarias partes puncti B, dein puncta A, F, G, I, H, K, L & R determinentur ut ante, excepto tantum quod FH debet sumi ad partes ipsius F contra I, & quod HR non in linea HL, sed in linea AI ad utramque partem puncti H capi debet, & vice rectæ GRS duæ aliæ rectæ à puncto L ad puncta duo R & R hinc inde duci pro asymptotis Hyperbolæ. Cum istis itaque asymptotis LR, LR describe Hyperbolam per punctum G, ut & circulum centro K intervallo KG: & dimidia perpendiculorum ab eorum intersectionibus ad rectam AE demissorum erunt radices æquationis propositæ. Quæ omnia, signis + & − probe mutatis, demonstrantur ut prius.

Quod si Parabolam velis adhiberi, abibit punctum E in infinitum, atque adeo nullibi capiendum erit, & punctum H cum puncto F coincidet eritque Parabola circa axem HL cum latere recto principali BC per puncta G & A describenda, sito vertice ad partes puncti F ad quas punctum B situm est respectu puncti C.

Sic sunt constructiones per Parabolam, si simplicitatem analyticam spectes, simplicissimæ omnium. Eæ per Hyperbolam proximum locum obtinent, & ultimum locum tenent quæ per Ellipsin

absol-

abſolvuntur. Quod ſi praxeos manualis in deſcribendis figuris ſpectetur ſimplicitas, mutandus eſt ordo.

In hiſce autem conſtructionibus obſervandum venit quod proportione lateris recti principalis ad latus tranſverſum determinatur ſpecies Ellipſeos & Hyperbolæ, & proportio illa eadem eſt quæ linearum BC & BE, atque adeo aſſumi poteſt: Parabolæ vero ſpecies eſt unica quam artifex ponendo BE infinite longam aſſequitur. Sic igitur penes artificem eſt æquationem quamcunque cubicam per conicam ſectionem imperatæ ſpeciei conſtruere. A figuris autem ſpecie datis ad figuras magnitudine datas devenietur augendo vel diminuendo in ratione data lineas omnes quibus figuræ ſpecie dabantur, atque ita æquationes omnes cubicas per datam quamvis Conicam ſectionem conſtruere licebit. Id quod ſic plenius explico.

Proponatur æquationem quamcunque cubicam $x^3 = pxx.\ qx.\ r$, *ope datæ cujuſcunque ſectionis conicæ conſtruere.*

A puncto quovis B in recta quavis infinita BCE, cape duas quaſcunq; longitudines BC,BE ad eaſdem

partes ſi data Coni ſectio ſit Ellipſis, ad contrarias

ſi

si ea sit Hyperbola. Sit autem BC ad BE ut datæ sectionis latus rectum principale ad latus transversum, & BC nominata n, cape BA$= \frac{q}{n}$, idque

versus C si habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias, Ad punctum A erige perpendiculu mAI, in que eo cape AF æqualem p & FG æqualem AF; item FI æqualem $\frac{r}{nn}$. Capiatur vero FI versus G

si termini p & r habent eadem signa, aliter versus A. Dein fac ut sit FH ad FI ut BC ad BE, & hanc FH cape à puncto F versus I si sectio sit Ellipsis, aut ad partes contrarias si ea sit Hyperbola. Porro compleantur parallelogramma JACK & HAEL, & hæ omnes jam descriptæ lineæ transferantur ad datam sectionem Conicam, aut quod perinde est, his superponatur curva, ita ut axis ejus sive transversa diameter principalis conveniat cum recta LH & centrum cum puncto L. His ita constitutis agatur recta KL ut & recta GL secans conicam sectionem in g. In LK cape Lk quæ sit ad LK ut Lg ad LG, centroque k & intervallo kg describe circulum. A punctis ubi hic secuerit curvam impositam demitte perpendicula ad lineam LH, cujusmodi sit γ T. Denique versus γ, cape TY quæ sit ad Tγ ut LG ad Lg, & hæc TY producta secet rectam AB in X, eritque recta $\frac{1}{2}$ XY una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ jacent ad partes rectæ AB ad quas recta FI jacet à puncto F, & negativæ quæ jacent ad contrarias partes si modo habeatur $+r$, & contra si $-r$ obvenerit.

Hoc modo construuntur æquationes cubicæ per Ellipses & Hyperbolas datas: Quod si detur Parabola, capienda est BC æqualis lateri recto ipsius. Dein punctis A, F, G, I & K inventis ut ante, centro K intervallo KG describendus est circulus, & Parabola ita applicanda ad Schema jam descriptum (aut Schema ad Parabolam) ut ipsa transeat per puncta A & G, & axis ejus ipsi AC parallelus per punctum F, cadente vertice ad partes puncti illius F ad quas punctum B cadit à puncto C. His ita constitutis, si perpendicula ab ejus occursibus cum circulo demittantur ad lineam BC, eorum dimidia erunt radices æquationis construendæ.

Et notes quod ubi secundus æquationis terminus deest, & latus rectum Parabolæ ponitur numerus binarius, hæc constructio evadet eadem cum illa quam Cartesius attulit in Geometria sua, præterquam quod lineamenta hic sunt illorum duplicia.

Hæc est constructionum regula generalis. Verum ubi problemata particularia proponuntur, consulendum est constructionum formulis simplicissimis. Libera enim manet quantitas n, cujus assumptione constructio plerumque simplicior reddi potest. Ejus rei exemplum unum subjungo.

Detur Ellipsis, & inter datas lineas a & b inveniendæ sint duæ mediæ proportionales. Sit earum prima x, & $a.x.\frac{xx}{a}.b$ erunt continue proportionales, adeoque $ab = \frac{x^3}{a}$, seu $x^3 = aab$ æquatio est, quam construere oportet. Hic desunt termini p, & q, & terminus r est aab, adeoque BA & AF nullæ sunt, & FI est $\frac{aab}{nn}$. Ut terminus novissimus evadat simplicior assumatur $n = a$, & fiet $FI = b$ Deinde constructio ita se habebit.

A puncto quovis A in recta quavis infinita AE cape $AC = a$, & ad easdem partes puncti A cape AC ad AE ut est Ellipseos latus rectum principale ad latus transversum. Tum in perpendiculo AI cape $AI = b$, & AH ad AI ut est AC ad AE. Compleantur parallelogramma JACK, HAEL. Jungantur LA, LK. Huic schemati imponatur Ellipsis data. Secet ea rectam AL in puncto g, Fiat Lk ad LK ut Lg ad LA. Centro k intervallo kg describatur circulus secans Ellipsin in γ.

Ad

Ad AE demittatur perpendiculum γX secans HL in T; & producatur id ad Y ut sit TY ad $T\gamma$ sicut LA ad Lg. Sic fiet $\frac{1}{2}$ XY prima duarum medie proportionalium x. Q. E. I.

F I N I S.

ERRATA.

Pag. 59. *lin.* 5. *lege* dupli Quoti. *Pag.* 150. *lin.* 16. E & F. p. 151. *lin.* 3. ex vigesimo octavo Problemate. p. 197. *lin. ult.* $\dfrac{Ex}{\frac{E}{F}\sqrt{xx-aa}}$

NEWTON'S ARITH-METICK